



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

---

Tesi di laurea in Fisica

**Estensione del modello e simulazioni di  
ottiche focalizzanti per raggi X e Gamma:  
verso la realizzazione di un settore di lente di  
Laue**

Relatore:

Prof. Piero Rosati

II Relatore:

Dott. Enrico Virgilli

Laureando:

Lisa Ferro

---

Anno Accademico 2017/2018



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Lenti di Laue</b>	<b>7</b>
1.1 Ottiche focalizzanti e a vista diretta . . . . .	7
1.2 Teoria della diffrazione dei raggi X . . . . .	10
1.3 Tipi di cristalli e loro comportamento . . . . .	13
1.3.1 Cristalli perfetti piatti . . . . .	13
1.3.2 Cristalli a mosaico piatti . . . . .	13
1.3.3 Cristalli a mosaico curvi . . . . .	15
1.3.4 Attenuazione del fascio nei cristalli . . . . .	17
1.4 Struttura della lente di Laue . . . . .	20
<b>2 Software Monte Carlo e simulazioni</b>	<b>23</b>
2.1 Il software Laue Lens Library . . . . .	23
2.1.1 Sorgente di radiazione monocromatica . . . . .	25
2.1.2 Distribuzione del raggio di curvatura dei cristalli . . . . .	26
2.1.3 Distribuzione dell'errore di posizionamento dei cristalli . . . . .	27
2.2 Comportamento nominale dei cristalli . . . . .	28
2.3 Deviazioni dal comportamento ideale . . . . .	31
2.3.1 Incertezza di posizionamento di un cristallo . . . . .	31
2.3.2 Incertezza associata alla deformazione di un cristallo . . . . .	33
2.4 Studio degli errori sperimentali misurati . . . . .	39
2.4.1 Distribuzioni degli errori di deformazione dei cristalli . . . . .	40
2.4.2 Incertezza nel posizionamento dei cristalli . . . . .	43
2.5 Comportamento di un anello di cristalli . . . . .	47
2.6 Comportamento di un settore di cristalli . . . . .	51
<b>3 Attività sperimentale</b>	<b>59</b>
3.1 Scelta dei materiali cristallini . . . . .	59
3.1.1 Adesivo impiegato . . . . .	61
3.1.2 Scelta del substrato . . . . .	64
<b>4 Conclusioni</b>	<b>67</b>



# Elenco delle figure

1.1	Schematizzazione della legge di Bragg. . . . .	11
1.2	Esempio di costruzione di Ewald. . . . .	12
1.3	Tipi di geometrie per la diffrazione. . . . .	13
1.4	Raffig.zione degli angoli di Bragg minimi e massimi nel caso di un cristallo curvo. . . . .	16
1.5	Comportamento di un fascio policromatico incidente su un cristallo curvo. . . . .	17
1.6	Confronto tra focalizzazione eseguita con cristallo piatto e cristallo curvo. . . . .	18
1.7	Schema di una lente di Laue. . . . .	20
2.1	Schema concettuale del programma di simulazione, delle varie parti che lo compongono e degli output prodotti. . . . .	25
2.2	Sistema di riferimento adottato per la descrizione delle rotazioni di un cristallo. . . . .	27
2.3	Costruzione di un diffratto. . . . .	29
2.4	Rappresentazione grafica dell'errore di disallineamento $\theta$ . . . . .	32
2.5	Rappresentazione grafica dell'errore di disallineamento $\phi$ . . . . .	32
2.6	Rappresentazione grafica dell'effetto di distorsione del raggio di curvatura. . . . .	34
2.7	Studio degli effetti delle deformazioni radiali su cristalli di mosaicità pari a 5 arcsec. . . . .	37
2.8	Studio degli effetti delle deformazioni radiali su cristalli di mosaicità pari a 15 arcsec. . . . .	37
2.9	Studio degli effetti delle deformazioni radiali su cristalli di mosaicità pari a 30 arcsec. . . . .	38
2.10	Distribuzione dei raggi di curvatura misurati. . . . .	40
2.11	Distribuzione delle mosaicità misurate. . . . .	41
2.12	Effetto di distorsione dell'immagine reale prodotta dalle disuniformità del cristallo. . . . .	42
2.13	Schematizzazione dell'effetto di distorsione della simmetria cilindrica nei cristalli reali. . . . .	42
2.14	Diffratto reale osservato dal detector. . . . .	43

2.15	Valori di disallineamento misurati sui singoli cristalli. . . . .	45
2.16	PSF di un anello di cristalli nominali. . . . .	48
2.17	PSF di un anello di cristalli affetti da errore sistematico nel posizionamento. . . . .	49
2.18	PSF di un anello di cristalli: effetto della curvatura. . . . .	51
2.19	Immagine prodotta da un anello di cristalli nel caso di errori più grandi possibili. . . . .	52
2.20	Confronto tra i profili lungo l'asse x dei tre settori simulati. .	53
2.21	Rappresentazione della lente di Laue costituita da 1154 cristal- li e del modulo (in rosso) che sarà realizzato nel laboratorio LARIX. . . . .	54
2.22	Immagine prodotta da un settore di lente di Laue ideale. . .	55
2.23	Confronto tra i profili lungo l'asse x dei tre settori simulati. .	56
3.1	Cristallo di GaAs impiegato nel prototipo di lente di Laue. .	60
3.2	Effetto della presenza dell'angolo di miscut $\theta$ . . . . .	61
3.3	Foto del dosatore di colla. . . . .	62
3.4	Substrato di quarzo impiegato nel prototipo di lente di Laue.	65

# Elenco delle tabelle

2.1	Valori ottenuti per i parametri dei fit, con relativi errori. . . . .	36
2.2	Intervalli di confidenza per $\mu$ per la distribuzione dell'angolo $\theta$ . . . . .	46
2.3	Intervalli di confidenza per $\mu$ e $\sigma$ per la distribuzione dell'angolo $\theta$ . . . . .	47
2.4	Intervalli di confidenza per $\mu$ e $\sigma$ per la distribuzione dell'angolo $\phi$ . . . . .	47
2.5	Dimensioni delle PSF prodotte in assenza di errori e simulando la peggiore e la migliore distribuzione d'errore di disallineamento. . . . .	52
3.1	Primo campione di gocce di colla pesate . . . . .	63
3.2	Secondo campione di gocce di colla pesate . . . . .	63
3.3	Terzo campione di gocce di colla pesate . . . . .	63
3.4	Quarto campione di gocce di colla pesate . . . . .	64



# Introduzione

## L'astronomia X e Gamma dalle origini ad oggi

Rispetto all'astronomia ottica, l'astronomia dei raggi X e Gamma presenta notevoli complicazioni soprattutto determinate dalla schermatura che l'atmosfera terrestre pone a questo tipo di radiazione. Per poter effettuare rilevamenti in X e Gamma è necessario quindi montare la strumentazione su razzi, satelliti o palloni da inviare in alta atmosfera [1]. La prima rilevazione di sorgenti esterne al sistema solare risale al 1962, quando il team di Giacconi [2] scoprì la prima sorgente di raggi X nella costellazione dello Scorpione ed una radiazione di fondo diffusa. I risultati dell'esperimento furono sorprendenti, in quanto all'epoca non si riteneva che potessero esistere sorgenti astrofisiche nella banda X. I risultati ottenuti da Giacconi mostrarono invece che viene emessa moltissima radiazione non ottica e misero in luce l'importanza del dover studiare anche questo tipo di fenomeni per avere un quadro chiaro del funzionamento dei processi astrofisici che occorrono nello spazio. Sempre degli anni '60 è la scoperta dei raggi Gamma di origine cosmica, ad opera dei satelliti Vela. La scoperta in questo caso fu quasi casuale, in quanto i satelliti Vela furono messi in orbita con tutt'altro obiettivo e non ci si aspettava di rilevare sorgenti astrofisiche di radiazioni ionizzanti. Questi satelliti facevano parte di un programma volto a monitorare il tipo di esperimenti con armi nucleari svolto sulla Terra e ad assicurare che venisse rispettato il Partial Test Ban Treaty, trattato del 1963 che vietava tutti i test nucleari non eseguiti nel sottosuolo. Nel 1967 due di questi satelliti rilevarono un lampo di raggi Gamma che si appurò essere di origine cosmica [3]. In seguito a questa scoperta, i dati raccolti dai Vela provenienti da sorgenti extrasolari vennero catalogati ed analizzati, andando a costituire le prime rivelazioni di radiazione ad altissima energia proveniente dal cosmo. I satelliti Vela 5A e 5B erano equipaggiati con due rivelatori a scintillazione capaci di rilevare raggi X, raggi Gamma e neutroni su due canali di energia: 3 - 12 keV e 6 - 12 keV. Avevano un'area efficace di 26 cm<sup>2</sup> ed erano capaci di scansionare tutto il cielo nel giro di 56 ore. Le precedenti scoperte resero evidente la necessità di progettare delle missioni spaziali appositamente pensate per studiare il cielo ad alte energie. Con

questo obiettivo venne infatti lanciato il satellite Uhuru, equipaggiato con due set di contatori proporzionali operanti nella banda tra 2 e 20 keV, che eseguì le prime osservazioni di sorgenti X estese a tutto il cielo. Il secondo satellite della serie, SAS - 2 [4], fu invece pensato per la rilevazione di raggi Gamma ed era costituito da una camera a scintille capace di rilevare segnali di energia compresa tra 20 MeV ed 1 GeV. Negli anni '70 vennero lanciati i satelliti COS-B [5] ed HEAO-1 [6], a cui si devono rispettivamente le prime mappe del cielo a raggi Gamma e a raggi X. Questi primi telescopi erano tutti non focalizzanti e basati essenzialmente su contatori proporzionali. Il primo satellite capace di focalizzare la radiazione tramite la tecnica dell'incidenza radente fu l'Einstein Observatory (0.1 keV - 20 keV) [7], con una risoluzione spaziale di qualche secondo d'arco. La tecnica di incidenza radente consiste nel far incidere la radiazione su degli specchi inclinati di un angolo molto piccolo rispetto alla direzione di propagazione del raggio, in modo da riuscire a deviarlo nonostante la sua alta energia. Per far questo si utilizzano specchi parabolici ed iperbolici in sequenza. Nonostante questa tecnica sia tuttora quella che ha permesso di ottenere migliori risultati di focalizzazione, l'area efficace risulta comunque molto minore dell'area geometrica dei rilevatori usati. Successivamente furono lanciati i satelliti EXOSAT dell'ESA e ROSAT, frutto di una collaborazione tra Germania e Stati Uniti, che permisero l'osservazione di tantissimi oggetti cosmici, inclusi AGN, cluster di galassie, resti di supernova, sistemi binari a raggi X, nane bianche e stelle di neutroni singole [8, 9, 10, 11].

Negli anni '90 furono lanciati altri satelliti molto importanti, tra cui ASCA, che studiò accuratamente l'emissione di galassie AGN [12, 13], e CGRO, primo satellite ad avere una larga banda energetica (20 keV - 10 GeV). Molto importante fu RXTE [14], satellite appositamente studiato per poter misurare efficacemente le caratteristiche temporali di segnali astrofisici nella banda 2 - 250 keV. Questo satellite ha permesso di ottenere fondamentali informazioni riguardo la variabilità temporale delle emissioni di raggi X provenienti da stelle di neutroni, buchi neri, pulsar e lampi X. Altro satellite importantissimo fu Beppo SAX [15]. Questo satellite aveva una banda totale compresa tra 0.1 keV e 700 keV ed era equipaggiato con 5 diversi strumenti, tra cui telescopi per l'analisi in campo stretto e rilevatori per l'analisi in campo largo. Grazie ai dati riguardo i lampi di raggi Gamma raccolti da Beppo SAX, fu possibile determinare che questi eventi sono di origine cosmologica e per la prima volta ne venne esaminato l'afterglow [16].

Molto importante è l'osservatorio Chandra (0.1 - 10 keV) [17, 18, 19], costituito da un singolo telescopio ad incidenza radente sul cui piano focale sono posizionati uno spettrometro ed un imager con risoluzione di 0.5", con un notevole miglioramento rispetto a tutti gli strumenti precedenti. Altra importante missione per astrofisica ad alte energie è XMM-Newton [20]. Questo satellite consiste in tre telescopi ad incidenza radente allineati, in modo da aumentare il più possibile l'area efficace, che lavorano nella ban-

da 0.1 - 15 keV. Mentre Chandra è il miglior telescopio per ottenere immagini del cielo, XMM-Newton è il migliore per la spettroscopia e gli spettri raccolti da quest'ultimo sono i più accurati finora acquisiti nella banda di energia in cui lavora.

Altri importantissimi satelliti in attività sono INTEGRAL [21] e Swift [22, 23], entrambi dedicati ai fenomeni ad alte energie. INTEGRAL è costituito da tre strumenti: IBIS (15 keV - 100 MeV) [24, 25], lo spettrometro SPI (2 keV - 1 MeV) [26] e JEM-X (3 - 35 keV) [27]. Tutti gli strumenti di INTEGRAL sono basati sulla tecnica delle maschere codificate che permettono di ottenere immagini del cielo fino a qualche MeV di energia con una risoluzione angolare di 12' (IBIS). Al di sopra di questo limite anche la maschera codificata risulta trasparente alla radiazione, per cui non è più sfruttabile l'effetto di modulazione della radiazione. Grazie ad INTEGRAL è stato possibile osservare la distribuzione spaziale della linea a 511 keV relativa all'annichilazione materia-antimateria. Swift nasce invece appositamente per studiare i lampi di raggi Gamma ed è dotato di uno strumento capace di rilevare molto velocemente le coordinate di un GRB e di inviarle ai telescopi di terra per l'osservazione con gli strumenti ottici. Satelliti molto recenti sono poi NuSTAR (2012) [28] e l'osservatorio Insight-HXMT (15 Giugno 2017) [29, 30]. Attraverso miglioramenti della tecnologia dell'incidenza radente, NuSTAR è in grado di focalizzare raggi X fino a 80 keV. Infine la missione cinese HXMT è la più recente e studierà sorgenti compatte nell'intervallo di energia 20 - 200 keV.

## **Problemi aperti in astrofisica dei raggi X e gamma**

I Raggi X duri e Gamma molli sono un'importante componente dell'emissione di molte sorgenti astrofisiche galattiche ed extragalattiche. Attualmente gli studi sono limitati dal fatto che non si ha un'elevata sensibilità di misura per radiazione sopra i 100 keV, di conseguenza varie teorie relative alla loro natura possono essere compatibili con i dati raccolti. Ottenere dati più precisi permetterebbe di determinare meglio le origini di questi fenomeni, oltre ad ottenere molte nuove informazioni su di loro. Ad esempio, lo spettro delle binarie X galattiche si estende oltre i 100 keV e nel caso delle pulsar, dove avviene emissione per sincrotrone, studiare lo spettro permette di avere importanti informazioni sul campo magnetico della stella di neutroni. Attualmente si conosce un eccesso di radiazione sopra i 30 keV ("coda dura") per alcune sorgenti [31, 32, 33, 34]. Osservazioni a miglior sensibilità sono richieste per capire meglio questa componente spettrale. Il modello di Magnetar (stelle di neutroni con un intenso campo magnetico) non prevede una emissione sopra i 10 keV, tuttavia recenti misure fatte con IBIS/INTEGRAL hanno invece evidenziato il contrario [35, 36]. Lo spettro misurato segue una legge di potenza con indice minore di 2, per

cui un'energia di taglio (cut-off) è attesa, ma ancora non osservata per via della bassa sensibilità attorno al valore a cui è prevista. Altre importanti domande aperte riguardano lo studio della fisica dell'accrescimento nei Nuclei Galattici Attivi (AGN). Le proprietà della corona attorno al buco nero supermassivo sono ancora poco note ed anche per le AGN, misure recenti effettuate con INTEGRAL ed altri telescopi per raggi X molli hanno evidenziato la presenza di cutoff ad alte energie [37]. Questi cut-off sono stati misurati per una buona quantità di AGN. Si è visto che la maggior parte delle energie di cut-off è attorno a 100 keV, con un limite massimo a 300 keV. Nel caso delle Blazar (AGN con forte emissioni di onde radio), lo spettro presenta due picchi. Il primo è probabilmente dovuto ad emissione di sincrotrone (picco nella banda dei raggi X molli), il secondo, che può estendersi ai raggi Gamma molto energetici, è invece dovuto a Compton Inverso. Altro problema tuttora aperto è lo studio del fondo cosmico a raggi X (CXB). Lo spettro del CXB è caratterizzato da un picco attorno a 30 keV, a cui segue una discesa ben definita. Sotto i 30 keV la CXB viene spiegata come l'insieme della radiazione emessa da sorgenti X irrisolte, ad esempio dovuta ad AGN presenti nel gruppo locale [38]. L'origine della discesa invece non è ancora chiara e viene attribuita a Blazar, il cui picco di emissione è nell'intervallo 70-100 keV [4, 39]. Per studiare più approfonditamente la CXB è quindi necessario estendere la sensibilità degli strumenti oltre al limite raggiunto attualmente da NuSTAR. Un ulteriore problema aperto è associato all'osservazione della riga di annichilazione elettrone-positrone a 511 keV scoperta al centro della nostra Galassia. I positroni vengono prodotti in esplosioni cosmiche che fungono da acceleratori di particelle e, studiando la linea di annichilazione, si è osservato che il centro galattico è particolarmente ricco di positroni. La mappa di tutto il cielo fatta da SPI/INTEGRAL ha evidenziato un'asimmetria nella distribuzione dell'emissione a 511 keV [40]. L'origine di questa emissione è tuttora misteriosa. È stato ipotizzato che tale emissione possa essere dovuta a binarie a raggi X con una forte emissione ad energie superiori a 20 keV. È stato anche ipotizzato che l'origine di questa radiazione possa essere la presenza di elementi radioattivi oppure di una sorgente di raggi Gamma. Un'altra ipotesi prevede che la presenza di questa linea sia dovuta a materia oscura che decade in materia ed antimateria, andando quindi a produrre positroni [41]. Poter focalizzare radiazione X e Gamma permetterebbe enormi passi avanti per tutti i problemi astrofisici aperti coinvolgenti le alte energie, grazie al miglioramento sia della sensibilità al continuo e alle righe, sia in termini di risoluzione spaziale.

## Organizzazione della Tesi

L'obiettivo del progetto nel quale sono stata coinvolta riguarda la realizzazione di un'ottica in grado di focalizzare la radiazione in una banda d'energia di 100 - 600 keV. La tecnica delle lenti di Laue è in una avanzata fase di sviluppo al Dipartimento di Fisica e Scienze della Terra di Ferrara. Con questa Tesi ho contribuito all'avanzamento della tecnologia necessaria alla loro realizzazione.

Nel primo Capitolo verrà fatto un confronto tra ottiche focalizzanti ed ottiche non focalizzanti, in modo da poter comprendere la necessità di realizzare strumenti in grado di sfruttare la focalizzazione della radiazione X e Gamma. Nello stesso Capitolo verranno spiegati i principi fisici su cui si basano le lenti di Laue e descritti i cristalli sui quali la tecnica è basata. La lente infatti è costituita di cristalli che vengono montati su un supporto, che chiamiamo substrato. Per ovviare alle difficoltà costruttive nel creare una lente molto grande è stato deciso di applicare un approccio modulare: la lente è suddivisa in moduli, costituiti da qualche decina di cristalli ciascuno. Ogni petalo è costituito da un numero limitato ( $<10$ ) di moduli cristallini. Questi petali verranno prodotti singolarmente e poi uniti in modo da formare la lente totale. Questa Tesi è focalizzata sulla preparazione preliminare alla futura costruzione del primo modulo di lente. Ho analizzato gli errori che ci aspettiamo di commettere durante il montaggio sulla base dei dati misurati da prototipi precedenti e sfruttato i risultati ottenuti per produrre delle simulazioni il più possibile verosimili, che verranno confrontate con le distribuzioni spaziali da misurare in laboratorio. Il Capitolo 2 è rivolto alla descrizione del software impiegato. In questa fase non ho solo impiegato il software come utilizzatore, ma ho anche contribuito alla soluzione di alcuni errori e all'implementazione di alcune nuove funzionalità. Le più importanti riguardano l'implementazione delle condizioni reali di incertezza nel posizionamento delle tessere e l'inclusione di una possibile deformazione dei cristalli rispetto al raggio di curvatura ottimale. In questo capitolo viene inoltre spiegato l'effetto di errori di posizionamento e di deformazioni radiali del cristallo. Viene poi presentato il risultato dell'analisi degli errori presenti sui precedenti prototipi, che ci hanno permesso di ricavare un'ipotetica distribuzione attesa degli effetti che vanno a ridurre la qualità della PSF, ed infine vengono presentate le simulazioni relative al prototipo da costruire.

Il terzo capitolo è invece dedicato all'attività sperimentale (svolta presso il laboratorio LARIX) volta alla progettazione e preparazione preliminare del montaggio del prototipo. In questo capitolo vengono illustrati i materiali che verranno impiegati, quindi il tipo di cristalli, di substrato, le colle da impiegare ed i supporti per la lente. I cristalli saranno montati su un supporto di quarzo mediante l'utilizzo di una colla UV e sfruttando un robot appositamente pensato per il montaggio. Tali accorgimenti sono volti

a migliorare l'accuratezza nel montaggio delle tessere, che devono essere disposte con precisione micrometrica. Il substrato è stato scelto in quarzo poiché è uno dei materiali con il più basso coefficiente di dilatazione termica. Per ciascun cristallo verranno registrate la distribuzione dei fotoni sul piano del rivelatore e la posizione del centroide dell'immagine che produrranno. La somma delle immagini fornirà la risposta sperimentale, che verrà confrontata con le simulazioni Monte Carlo fatte durante questo elaborato.

# Capitolo 1

## Lenti di Laue: giustificazione e metodo di focalizzazione

*In questo capitolo vengono descritti i principi generali su cui si basano le ottiche focalizzanti per raggi X duri e Gamma molli. Tali sistemi sono vere e proprie lenti per alte energie (lenti di Laue) e si basano sull'impiego di materiali cristallini, cioè materiali aventi una struttura atomica ordinata. In questo Capitolo vengono descritti i parametri principali che caratterizzano i materiali cristallini, tra cui la distanza fra i piani atomici usati per la diffrazione, la mosaicità e la loro curvatura.*

### 1.1 Ottiche focalizzanti e a vista diretta

L'applicazione di ottiche focalizzanti risulta necessaria per andare ad aumentare la sensibilità dei telescopi oltre il limite attuale ed allo stesso tempo riuscire a mantenere abbastanza contenuta l'area totale dell'apparato, in modo che questo sia adatto ad essere mandato in orbita. Si definisce quindi la sensibilità  $I_n^{min}$  di un telescopio come l'intensità minima rilevabile in un tempo di osservazione  $T_{obs}$  ed ha diversa espressione a seconda del tipo di ottica, focalizzante o meno. Sia per telescopi focalizzanti che per telescopi a vista diretta si ottiene imponendo che il rapporto segnale rumore abbia il valore da noi desiderato. Si considera quindi il numero di eventi totali  $N_{tot}$  registrati in un tempo di osservazione  $T_{obs}$  in un intervallo energetico  $\Delta E$ . Chiamati  $N_S$  il numero di conteggi provenienti dalla sorgente ed  $N_B$  il numero di conteggi provenienti dal background, si avrà necessariamente:

$$N_{tot} = N_S + N_B \quad (1.1)$$

Per telescopi a vista diretta,  $N_S$  ed  $N_B$  si ottengono come:

$$N_S = \eta(E)I(E)A_dT_{obs}\Delta E \quad (1.2)$$

$$N_B = B(E)A_dT_{obs}\Delta E \quad (1.3)$$

Dove:

- $\eta(E)$  è l'efficienza del detector ad una data energia E
- $I(E)$  è l'intensità della sorgente all'energia E (numero di fotoni emessi per unità di area, tempo ed energia)
- $B(E)$  è l'intensità del background all'energia E (numero di conteggi rilevati per unità di area, tempo ed energia)
- $A_d$  è l'area totale del detector

A partire dai conteggi totali, possiamo scrivere  $N_S$  come:

$$N_S = N_{tot} - N_B = (N_S + N_B) - N_B \quad (1.4)$$

Assumendo ora una statistica di Poisson per i conteggi rilevati, si avrà che l'incertezza su  $N_S$  risulta pari a:

$$\sigma_{N_S} = \sqrt{\sigma_{N_{tot}}^2 + \sigma_{N_B}^2} = \sqrt{N_{tot} + N_B} = \sqrt{N_S + 2N_B} \quad (1.5)$$

Per valutare la sensibilità si considera il caso in cui  $N_S \ll N_B$ , quindi:

$$\sigma_{N_S} \approx \sqrt{2N_B} = \sqrt{2B(E)A_dT_{obs}\Delta E} \quad (1.6)$$

Il rapporto segnale/rumore sarà quindi dato da:

$$n = \frac{N_S}{\sigma_{N_S}} = \frac{\eta(E)I(E)A_dT_{obs}\Delta E}{\sqrt{2B(E)A_dT_{obs}\Delta E}} \quad (1.7)$$

Si impone ora un valore per il rapporto segnale/rumore tale da garantire che il segnale rilevato sia stasticamente significativo, ad esempio  $n = 3$  o  $n = 5$ , e si inverte la relazione appena trovata in modo da trovare l'intensità minima rilevabile capace di produrre una detection significativa:

$$I_{n,vista\ diretta}^{min} = \frac{n}{\eta(E)} \sqrt{\frac{2B(E)}{A_dT_{obs}\Delta E}} \quad (1.8)$$

Da questa equazione si vede chiaramente che per aumentare la sensibilità si può ridurre il background, aumentare il tempo di raccolta dati o aumentare l'area geometrica del detector. È importante notare che  $I_n^{min}$  scala con la radice di queste grandezze fisiche, quindi per aumentare la sensibilità di un fattore 10 bisogna andare a diminuire di 100 volte il background oppure aumentare di 100 il tempo o l'area di raccolta. In particolare, aumentare l'area di raccolta può risultare molto problematico. I telescopi per alte energie sono necessariamente posizionati su satelliti, quindi non possono essere eccessivamente grandi in quanto risulterebbero molto difficili da portare in orbita e gestire. Questo problema costituisce una forte limitazione per l'uso

di telescopi a vista diretta e per permettere notevoli aumenti della sensibilità dei telescopi risulta necessario applicare delle tecniche di focalizzazione.

Per quanto riguarda i telescopi focalizzanti, il numero di conteggi della sorgente  $N_S$  è dato da:

$$N_S = \eta(E)I(E)f(E)A_{eff}(E)T_{obs}\Delta E \quad (1.9)$$

Dove:

- $f(E)$  è la frazione di fotoni focalizzata sul rivelatore dal sistema di focalizzazione
- $A_{eff}$  è l'area efficace della lente, data dal prodotto tra l'area geometrica effettiva  $A_d$  e l'efficienza di riflessione della lente ad una data energia  $\epsilon_R(E)$ .

Una differenza sostanziale rispetto ai telescopi non focalizzanti sta nella diversa stima che viene fatta del background che nel caso delle ottiche focalizzanti viene determinato tenendo conto dell'area del rivelatore sulla quale cade la frazione del flusso di energia focalizzato  $f(E)$  (tipicamente il 50% dei fotoni). In questa trattazione, quest'area viene chiamata  $A_{s(E)}$  e risulta pari al prodotto tra  $\pi$  e la FWHM della PSF. Ripetendo quindi in modo analogo il calcolo eseguito precedentemente per le ottiche non focalizzanti si ottiene:

$$I_{n,focalizzanti}^{min} = \frac{n}{\eta(E)f(E)A_{eff}(E)} \sqrt{\frac{2B(E)A_{f(E)}}{T_{obs}\Delta E}} \quad (1.10)$$

Si vede quindi che in questo caso la sensibilità è proporzionale alla radice dell'area geometrica ed inversamente proporzionale all'area efficace, quindi è sufficiente una minore riduzione dell'area del rivelatore per aumentare la sensibilità. Per telescopi focalizzanti è quindi più semplice ottenere telescopi ad alta sensibilità, ma con dimensioni sufficientemente ridotte per poter ancora essere montati su satelliti.

È quindi evidente che per superare il limite costruttivo dato dalle grandi dimensioni necessarie per creare telescopi a vista diretta è necessario sviluppare delle efficaci tecniche di focalizzazione della radiazione ad alte energie. Con le tecniche utilizzate fino ad oggi (principalmente tecniche di incidenza radente), si riesce a focalizzare la radiazione fino a circa 70 keV, tuttavia esistono molti fenomeni ad energie più alte per cui sarebbe necessario l'impiego di telescopi più precisi di quelli attuali. Risulta quindi necessario andare a sviluppare nuove tecniche di focalizzazione per alte energie, obiettivo che appunto si pone il progetto delle Lenti di Laue. Con

questo tipo di lenti si ipotizza di sfruttare la diffrazione di raggi X e Gamma dovuta a reticoli cristallini per andare a deviare la radiazione proveniente da sorgenti astrofisiche e concentrarla in un punto. La possibilità di sfruttare la diffrazione per focalizzare radiazione in condizioni spaziali è già stata dimostrata dal progetto CLAIRE [42]. Con il progetto di Lente di Laue in costruzione qui a Ferrara si sta cercando di sviluppare una lente ad ampia banda, capace di focalizzare radiazione a partire da 100 keV fino a 600 keV [43, 44, 45].

## 1.2 Teoria della diffrazione dei raggi X

La diffrazione dei raggi X al passaggio in un reticolo cristallino è il fenomeno fisico utilizzato per la costruzione di lenti di Laue. Questo fenomeno fu studiato separatamente da Bragg e Laue, a cui sono dovute due descrizioni diverse, ma analoghe.

Nella teoria di Bragg [46, 47], il reticolo cristallino è visto come un insieme di piani reticolari paralleli. Quando un fascio di fotoni colpisce il reticolo, viene deviato e fuoriesce dal cristallo (Fig. 1.1). L'intensità del fascio uscente non sarà comunque pari a quella del fascio incidente, ma sarà modulata da un pattern di diffrazione. I massimi di intensità sono dati dalla legge di Bragg:

$$2d_{hkl}\sin\theta_B = n\frac{hc}{E} \quad (1.11)$$

Dove  $d_{hkl}$  è la distanza reticolare tra i piani di indici di Miller  $(h, k, l)$ ,  $hc = 12.43 \text{ keV}\cdot\text{\AA}$  è il prodotto tra costante di Planck e velocità della luce,  $E$  è l'energia della radiazione incidente,  $n$  è l'ordine di diffrazione e  $\theta_B$  è l'angolo di Bragg, ovvero l'angolo compreso tra il vettore d'onda del fascio uscente e la direzione dei piani cristallini. Nella descrizione di Bragg, il fascio incidente, la normale ai piani cristallini ed il fascio diffratto sono sempre complanari, inoltre l'angolo tra il diffratto ed il trasmesso è sempre pari a  $2\theta_B$ .

Fissata la distanza intrareticolare e l'ordine di diffrazione, si avrà quindi una relazione inversa tra il seno dell'angolo di Bragg e l'energia del fascio incidente. Fissato poi un certo angolo, solo un fascio incidente ad una determinata energia verrà diffratto e, viceversa, fissata una particolare energia, perché i raggi X siano diffratti è necessario che colpiscano il reticolo con un determinato angolo di incidenza. Siccome il seno di  $\theta_B$  non può eccedere l'unità, perché avvenga diffrazione è necessario sia soddisfatta la condizione:

$$\sin\theta = \frac{nhc}{2dE} = \frac{n\lambda}{2d_{hkl}} < 1 \quad (1.12)$$

Di conseguenza per avere questo tipo di diffrazione è necessario colpire il reticolo con radiazione di lunghezza d'onda dello stesso ordine di grandez-

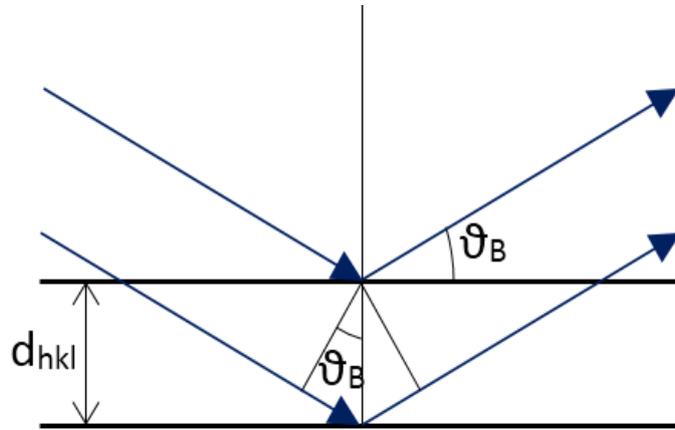


Figura 1.1: Schematizzazione della legge di Bragg.

za della distanza reticolare. Siccome  $d_{hkl}$  è dell'ordine di grandezza dell'Armstrong, per avere questo tipo di diffrazione è necessario utilizzare almeno raggi X, come osservato sperimentalmente. Il massimo di diffrazione con  $n = 1$  risulta molto più intenso degli altri, quindi per la costruzione del telescopio si cercherà di sfruttare il primo massimo. Fissando l'angolo ed aumentando invece  $n$ , si vede immediatamente dalla legge di Bragg che è necessario che il fotone abbia un'energia maggiore per essere diffratto. Siccome l'ottica che vogliamo andare a costruire è ad ampia banda, eventuali ordini di diffrazione superiore al primo ci sono comunque utili perché vanno ad aumentare i conteggi ad alte energie, tuttavia il loro contributo sarà molto minore di quello fornito dai primi ordini di diffrazione dei cristalli posizionati per diffrangere alte energie.

Come detto in precedenza, la diffrazione dei raggi X è equivalentemente descritta dalla teoria di Laue [48, 49] attraverso l'equazione:

$$\vec{k}_i - \vec{k}_d = \vec{g} \quad (1.13)$$

Dove  $\vec{k}_i$  e  $\vec{k}_d$  sono i vettori d'onda del fascio incidente e del diffratto, mentre  $\vec{g}$  è il vettore del reticolo reciproco. Con questa teoria è possibile ricavare graficamente le direzioni di diffrazione permesse attraverso la costruzione di Ewald (Fig. 1.2). Si va innanzitutto a costruire una sfera di raggio  $|k_i|$  centrata in  $O$  e passante per un punto  $P$  del reticolo reciproco, in modo che il vettore  $\vec{k}_i$  sia diretto lungo la direzione  $P - O$ . Poi si trovano tutti gli altri punti del reticolo appartenenti alla superficie sferica. Chiamato  $P'$  uno qualsiasi di questi punti, tutti i vettori  $P' - O$  soddisferanno la condizione di Laue e rappresenteranno le possibili direzioni di diffrazione. Dall'equazione di Bragg e dall'equazione di Laue si ottengono le stesse informazioni, infatti l'angolo tra  $\vec{k}_i$  e  $\vec{k}_d$  risulta pari a  $2\theta_B$  ed il modulo di  $\vec{g}$

risulta pari a  $2\pi d_{hkl}^{-1}$ , quindi andando a calcolare il modulo a destra e a sinistra nell'equazione di Laue si riottiene l'equazione di Bragg.

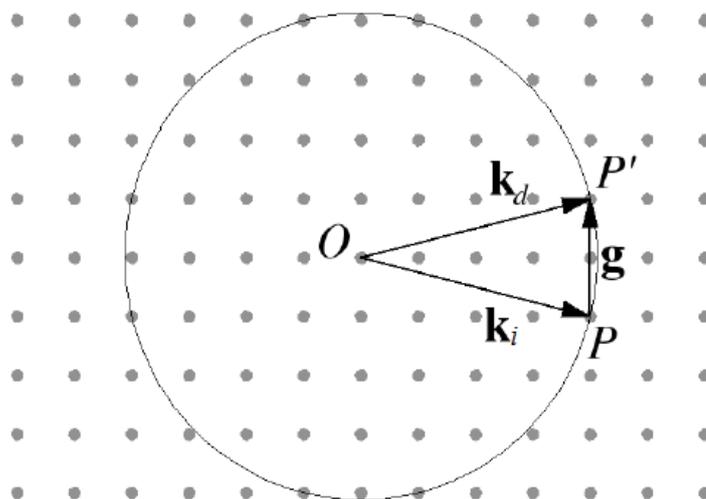


Figura 1.2: Esempio di costruzione di Ewald.

Il cristallo può essere posizionato secondo due conFig.zioni notevoli (Fig. 1.3), che determineranno in che zona di spazio verrà mandato il fascio deviato:

- Geometria di Bragg (conFig.zione di riflessione):  
In questa conFig.zione il cristallo viene posizionato in modo che i piani cristallini siano paralleli alla superficie dello stesso. Se si immagina che il cristallo divida lo spazio in due semipiani, in questa conFig.zione il raggio incidente viene riflesso indietro nello stesso semipiano da cui proviene.
- Geometria di Laue (conFig.zione di trasmissione):  
In questa conFig.zione, invece, il cristallo viene posizionato in modo che i piani cristallini siano perpendicolari alla superficie dello stesso. Il raggio incidente quindi attraversa il cristallo ed emerge sul secondo semipiano.

Per costruire il telescopio verrà proprio usata questa seconda conFig.zione. I cristalli verranno posizionati in conFig.zione di trasmissione e quindi la radiazione incidente proveniente dalle stelle verrà trasmessa attraverso la lente, che sarà strutturata in modo da concentrare il fascio trasmesso in un punto. Utilizzando la diffrazione dei raggi X, si cerca quindi di focalizzare il fascio incidente in maniera da ottenere un'immagine nitida della sorgente che l'ha generato.

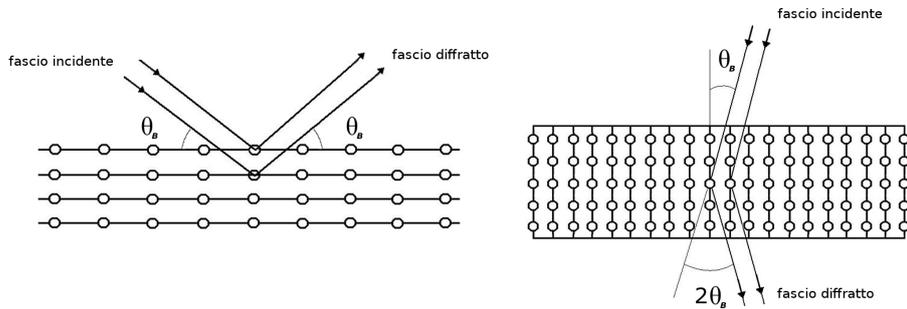


Figura 1.3: Geometria di Bragg (a destra) e Geometria di Laue (a sinistra).

### 1.3 Tipi di cristalli e loro comportamento

Lo studio della risposta dei vari tipi di cristalli ad un raggio incidente policromatico risulta fondamentale per determinare la PSF totale di un lente costituita di tantissimi cristalli. Prenderemo in considerazione tre tipi di cristalli: cristalli perfetti piatti, cristalli a mosaico piatti e cristalli a mosaico curvi. In questa sezione verranno descritti i vari tipi di cristallo e verranno inoltre descritti i principali fenomeni fisici che contribuiscono ad attenuare il fascio uscente dalle lenti e quindi a ridurre l'efficienza del sistema.

#### 1.3.1 Cristalli perfetti piatti

I cristalli più semplici sono i cristalli perfetti, nei quali le famiglie di piani cristallini con dati indici di Miller  $(h, k, l)$  sono tutte allineate secondo un'unica direzione. Questi cristalli ubbidiscono perfettamente alla legge di Bragg, quindi se un generico fascio policromatico incide su di essi, solo la componente con energia capace di soddisfare l'equazione di Bragg viene trasmessa. Il fascio incidente viene quindi monocromatizzato, ovvero dato un generico spettro d'energia in ingresso, lo spettro in uscita sarà una distribuzione molto stretta e centrata su una precisa energia. I cristalli perfetti sono degli ottimi monocromatori e possono essere usati per studiare singole linee spettrali, tuttavia non sono utili al nostro scopo in quanto miriamo ad ottenere un telescopio ad ampia banda. Questo problema viene risolto attraverso l'utilizzo di cristalli a mosaico, piatti o curvi.

#### 1.3.2 Cristalli a mosaico piatti

Un cristallo a mosaico può essere visto come un insieme di tanti microcristalli perfetti, chiamati cristalliti, di dimensione 10-100  $\mu\text{m}$  [50, 51]. Gli assi cristallografici di questi cristalliti non sono orientati tutti secondo un'unica direzione, ma è presente un disallineamento da una direzione media,

che segue un andamento gaussiano. Chiamato  $\delta$  questo disallineamento, la sua distribuzione  $W(\delta)$  è quindi:

$$W(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\eta} e^{-\frac{\delta^2}{2\eta^2}} \quad (1.14)$$

La FWHM di questa funzione prende il nome di mosaicità del macrocristallo, solitamente indicata con  $\beta$ , ed è legata a  $\eta$  attraverso la relazione  $\beta = 2.35\eta$ . Di solito la mosaicità viene espressa in gradi e, per i cristalli usati da noi, è tipicamente di 15 - 20 arcsec. I cristalli a mosaico sono una descrizione più realistica dei cristalli realmente presenti in natura, in quanto un cristallo assolutamente perfetto è chiaramente solo un modello teorico. La legge di Bragg in questo caso vale per ogni singola cristallite. Siccome i cristalliti possono essere leggermente disallineati dalla posizione media, l'angolo di Bragg per un fascio policromatico incidente cambierà per ciascuno di questi microcristalli e di conseguenza cambierà anche la componente del fascio che verrà trasmessa dalla lente. Lo spettro in uscita quindi non sarà più monocromatico, ma avrà un andamento che sarà legato alla distribuzione del disallineamento dei cristalliti.

Al limite per cui la mosaicità tende a zero si comportano ovviamente come cristalli perfetti e lo spettro uscente tenderà ad una linea, mentre aumentando la mosaicità la gaussiana si allargherà sempre di più, fino a diventare una distribuzione a scatola al limite per cui la mosaicità è infinita (cioè i cristalliti sono disposti in maniera del tutto casuale).

La banda passante attraverso il cristallo risulta quindi allargata ed è tanto più allargata quanto è alta la mosaicità del cristallo utilizzato. Quest'effetto è fondamentale perché ci permette quindi di focalizzare un intervallo di energie più ampio rispetto ad un cristallo perfetto. Tuttavia non possiamo aumentare la mosaicità a piacere, in quanto questa determina un defocussing dell'immagine ottenuta. Il defocussing nasce dal fatto che il cristallo è posizionato per far sì che la radiazione mandata nel fuoco della lente sia quella diffratta dal piano medio. Tuttavia i cristalliti disallineati potranno andare a diffrangere altre componenti energetiche del fascio policromatico incidente, che avranno quindi un angolo di Bragg diverso da quello diffratto dal piano medio. Siccome varia l'angolo di Bragg, varierà la posizione sul piano focale alla quale verrà intercettato il fascio uscente. Non tutti i fotoni finiranno quindi nel fuoco e questo andrà ad allargare l'immagine prodotta. Il profilo di questa immagine è poi dipendente dalla curva di riflettività del cristallo. Una spiegazione più dettagliata di questo effetto e di come è prodotta l'immagine viene data nel paragrafo 2.2.

Nel caso di cristalli a mosaico piatti, il piano medio dei cristalliti è comunque sempre lo stesso punto per punto, quindi i raggi entranti paralleli continueranno ad essere in media paralleli tra di loro anche dopo il passaggio attraverso il cristallo. Unica deviazione al parallelismo sarà data quindi dal defocussing, che si farà particolarmente sentire ai bordi dell'immagine.

Infatti se un raggio centrale viene leggermente deviato per effetto del defocussing, cadrà comunque dentro l'immagine, ma se il raggio colpisce la lente proprio ai bordi di questa potrà eventualmente cadere fuori dall'immagine. L'immagine prodotta sarà quindi qualitativamente della stessa forma e dimensione della lente, con uno sfocamento ai bordi dovuta all'effetto della mosaicità. Il fascio non viene quindi focalizzato, ma viene esclusivamente deviato da questi cristalli e risulta impossibile ottenere un'immagine significativamente più piccola della lente. Per i nostri scopi è necessario vi sia una vera focalizzazione del fascio, cosa che verrà resa possibile dai cristalli a mosaico curvi.

### 1.3.3 Cristalli a mosaico curvi

Questo tipo di cristalli, oltre ad avere una struttura a mosaico, risultano anche incurvati e sono caratterizzati quindi dall'aver un raggio di curvatura ben definito. La direzione del piano medio cambia punto per punto e di conseguenza cambierà anche l'angolo di Bragg puntualmente. Per ogni punto la funzione di riflettività sarà centrata su un diverso angolo medio  $\theta_M$ , mentre, in prima approssimazione, si assume che il valore della mosaicità resti costante in tutto il cristallo. L'angolo medio  $\theta_M$  è incluso in un intervallo  $[\theta_M^{min}, \theta_M^{max}]$  la cui ampiezza è proporzionale alla curvatura del cristallo: sarà più ampio se il cristallo ha una curvatura grande, altrimenti sarà più piccolo. Ovviamente al limite per cui la curvatura è 0, l'intervallo di variabilità per  $\theta_M$  si ridurrà ad un solo valore e si ricadrà di nuovo nel caso di cristallo piatto. I valori dei due intervalli estremi si possono facilmente calcolare nell'ipotesi che la dimensione focalizzante  $d$  del cristallo sia molto minore del raggio di curvatura dello stesso, cosa verificata nelle nostre condizioni. Per cristalli curvi il piano medio punto per punto sarà perpendicolare alla superficie del cristallo. Dalla Fig. 1.4 è quindi chiaramente visibile che gli angoli  $\theta_M^{min}$  e  $\theta_M^{max}$  saranno pari a:

$$\theta_M^{min} = \theta_M - \alpha \quad (1.15)$$

$$\theta_M^{max} = \theta_M + \alpha \quad (1.16)$$

Approssimando quindi per  $d \ll R$  e per valori di  $\alpha$  molto piccoli, si ottiene:

$$\sin\alpha = \frac{d}{2R} \approx \alpha \quad (1.17)$$

Siccome per ogni punto cambia il piano medio, cambierà anche il valore medio dell'energia diffratta. Dato quindi un fascio di raggi X incidente, ogni punto del cristallo produrrà come spettro in uscita una funzione centrata su una specifica energia contenuta in un intervallo  $[E_{min}, E_{max}]$ . Dalla

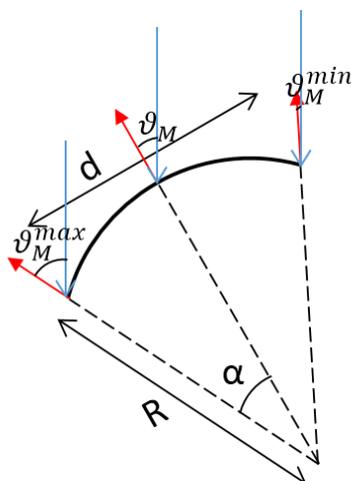


Figura 1.4: Raffigurazione degli angoli di Bragg minimi e massimi nel caso di un cristallo curvo. Le frecce blu rappresentano la radiazione incidente, mentre quelle rosse rappresentano il piano medio puntuale.

legge di Bragg si vede ovviamente che l'angolo più piccolo devia i fotoni a più alta energia, mentre viceversa i fotoni a più bassa energia saranno deviati dai punti del cristallo per i quali l'angolo di Bragg è maggiore. Lo spettro totale sarà dato dalla somma di tutte le PSF puntuali, avrà una forma allargata e l'intensità del fascio trasmesso sarà pressoché costante nell'intervallo  $[E_{min}, E_{max}]$  (Fig. 1.5). A parità di mosaicità, la banda di energia focalizzabile con un cristallo curvo è quindi maggiore di quella focalizzabile con un cristallo piatto.

La curvatura del cristallo risulta però fondamentale proprio per focalizzare la radiazione incidente ed il motivo di questo si può vedere da considerazioni geometriche. Il raggio incidente infatti esce deviato di un angolo pari al doppio dell'angolo di Bragg rispetto alla direzione d'incidenza del fascio. Siccome il piano medio ora è variabile, se sul cristallo viene fatto incidere un fascio di raggi X non divergente, i trasmessi non saranno più paralleli tra di loro, ma verranno deviati di un diverso angolo a seconda della loro energia. Il risultato netto di questo effetto sarà che il fascio incidente verrà focalizzato in una regione molto più piccola della dimensione della lente. Siccome i cristalli hanno una curvatura cilindrica, solo lungo la direzione radiale vi sarà focalizzazione, lungo la direzione trasversale la dimensione dell'immagine sarà comunque pari alla dimensione della tessera. Questa capacità di focalizzare risulta essere l'elemento chiave che ci ha spinto ad impiegare cristalli curvi per la creazione di una lente di Laue di grandi dimensioni, in quanto permetterebbe di riuscire a focalizzare una radiazione ad altra energia con una precisione molto simile a

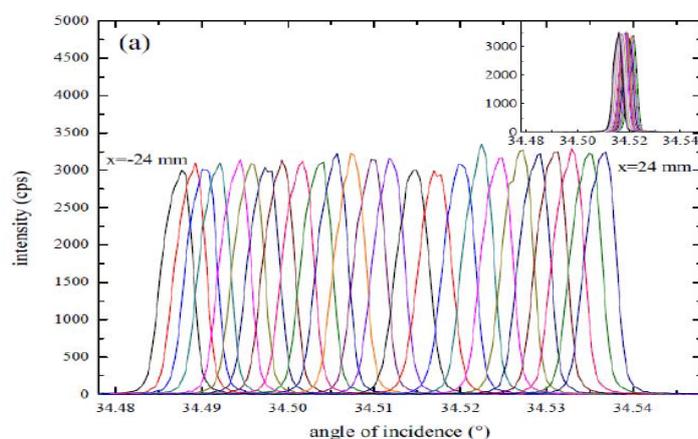


Figura 1.5: Comportamento di un fascio policromatico incidente su un cristallo curvo. Ogni punto del cristallo produce una diversa curva di intensità che va a sovrapporsi leggermente alle altre. L'effetto totale sarà un notevole allargamento della banda passante rispetto al caso di cristallo piatto.

quella ottenibile con un telescopio ottico. Lo svantaggio dei cristalli curvi è che il defocussing per via del mosaico ha un certo peso, in quanto i raggi non vengono più inviati su un'area come nel caso dei cristalli piatti, ma vengono mandati tutti indicativamente sulla stessa posizione, contribuendo alla formazione di un alone attorno all'immagine effettiva.

La differenza tra la focalizzazione ottenuta con i due tipi di cristalli è illustrata in Fig. 2.20

### 1.3.4 Attenuazione del fascio nei cristalli

Nei cristalli intervengono vari fenomeni fisici che inducono un'attenuazione del fascio che li attraversa. Il primo fenomeno è l'estinzione primaria, particolarmente importante per cristalli perfetti e si origina dal fatto che la radiazione incidente penetra nel reticolo mantenendo costante l'angolo. La condizione di Bragg viene quindi soddisfatta anche per ogni piano cristallino interno e questo fa sì che si generino delle riflessioni multiple. Si dimostra che ogni diffrazione di un fascio introduce uno sfasamento di  $\pi/2$  rispetto all'onda incidente, quindi un raggio doppiamente diffratto risulta sfasato di un angolo pari a  $\pi$  rispetto al fascio incidente. Questo crea quindi un'interferenza distruttiva che va ad attenuare il fascio attraversante il cristallo. L'estinzione primaria è molto importante per cristalli perfetti, mentre nei cristalli a mosaico i cristalliti sono leggermente disallineati e separati da microscopiche crepe ed irregolarità, quindi riflessioni doppie o multiple saranno molto rare ed il contributo all'attenuazione del fascio dato

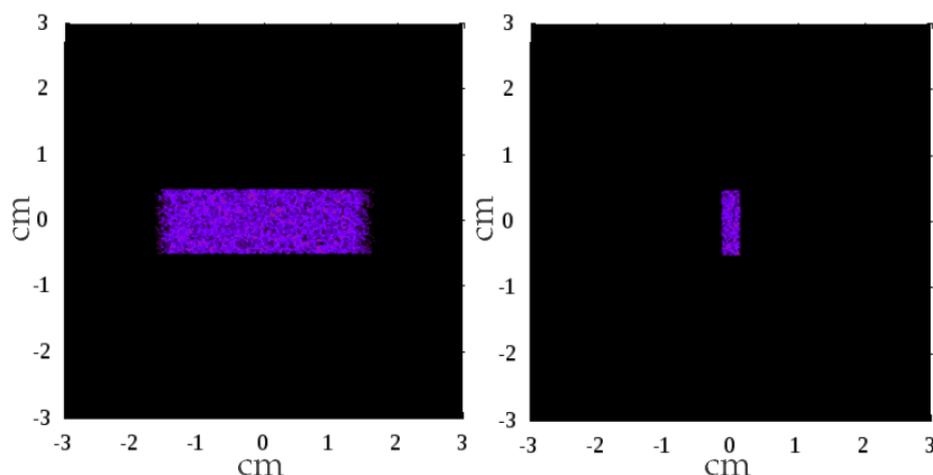


Figura 1.6: Differenza tra la focalizzazione ottenuta utilizzando un cristallo a mosaico piatto (a sinistra) ed un cristallo a mosaico curvo (a destra). Si può chiaramente vedere come nel caso di cristallo piatto l'immagine prodotta abbia una dimensione pari a quella del cristallo utilizzato, mentre nel caso di cristallo curvo la PSF risulta molto più stretta lungo la direzione focalizzante. In entrambi i casi la mosaicità è di 10 arcsec, quindi l'effetto di defocussing prodotto dal mosaico è poco evidente.

da questo effetto sarà trascurabile. Si dimostra che l'estinzione primaria è trascurabile se:[52]

$$t \ll \frac{V \cos\theta_0}{r_e \lambda |F_{hkl}|} \quad (1.18)$$

Dove  $t$  è lo spessore dei microcristalli,  $r_e$  è il raggio classico dell'elettrone,  $\lambda$  la lunghezza d'onda della radiazione incidente,  $V$  è il volume della cella cristallina,  $\theta_0$  è l'angolo tra la direzione di incidenza dei fotoni e la normale alla superficie del cristallo ed infine  $F_{hkl}$  è il fattore di struttura associato alla famiglia di piani  $(h,k,l)$ , che quantifica l'efficienza dello scattering [52]. Fissata la famiglia di piani considerati, la quantità  $\frac{V \cos\theta_0}{r_e |F_{hkl}|}$  è semplicemente un numero fissato, quindi per ogni valore di  $t$  esisterà sempre una lunghezza d'onda sufficientemente piccola da permettere di trascurare l'estinzione primaria.

L'estinzione secondaria invece è importante per tutti i tipi di cristalli e nasce dal fatto che se il cristallo ha un'alta riflettività, la maggior parte della radiazione verrà diffratta dalle zone del cristallo più vicine alla superficie, quindi la parte interna del cristallo verrà colpita da un fascio ridotto in quanto la maggior parte di questo sarà già stata deviata. Questo effetto si fa molto sentire quando i cristalliti sono molto grandi e poco disallineati, quindi molta radiazione viene diffratta subito e non riesce a penetrare nelle

zone più interne del cristallo. L'estinzione secondaria produce un effetto dello stesso ordine di grandezza del normale assorbimento di radiazione da parte del cristallo, quindi se l'assorbimento è trascurabile, allora lo sarà anche l'estinzione secondaria. In generale, l'assorbimento, e quindi l'estinzione secondaria, diventano trascurabili per  $t$  minore di  $10^{-3}$  cm.

## 1.4 Struttura della lente di Laue

Si vede quindi che per effetto della legge di Bragg la radiazione che incide su un cristallo viene deviata. Le lenti di Laue cercano di sfruttare questo effetto per indirizzare la radiazione elettromagnetica che le colpisce verso un punto unico. Su una lente di Laue i cristalli sono posizionati ed orientati in modo da indirizzare tutti i diffratti su un unico punto focale. I cristalli vengono montati su un supporto apposito di forma circolare e posizionati in anelli concentrici. Con questa geometria, i cristalli focalizzano ad una distanza pari a  $F = R/2$ , dove  $R$  è il loro raggio di curvatura. Sfruttando la legge di Bragg è facile risalire al valore dell'energia focalizzata da un generico anello posizionato ad un raggio  $r$  dal centro della lente. L'angolo di Bragg associato a questo anello si può ricavare in modo geometrico (Fig. 1.7).

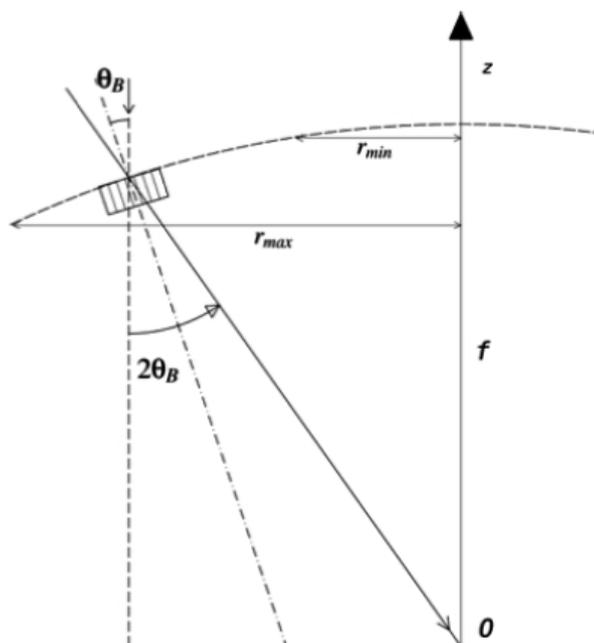


Figura 1.7: Schema di una lente di Laue.

$$2\theta_B = \arctan\left(\frac{r}{F}\right) \approx \frac{r}{F} \quad (1.19)$$

Nota quindi l'energia massima e l'energia minima che si desidera focalizzare con la lente, il raggio massimo ed il raggio minimo a cui vanno posizionati i cristalli, si possono ottenere dalla legge di Bragg semplicemente

invertendo la relazione:

$$\sin\theta_{min} = n \frac{hc}{2d_{hkl}E_{min}} \quad (1.20)$$

$$\sin\theta_{max} = n \frac{hc}{2d_{hkl}E_{max}} \quad (1.21)$$

Approssimando per angoli piccoli:

$$\sin\theta_{min} \approx \theta_{min} \approx \frac{r_{min}}{2F} = n \frac{hc}{2d_{hkl}E_{min}} \quad (1.22)$$

$$\sin\theta_{max} \approx \theta_{max} \approx \frac{r_{max}}{2F} = n \frac{hc}{2d_{hkl}E_{max}} \quad (1.23)$$

Da cui:

$$r_{min} = n \frac{hc}{d_{hkl}E_{min}} F \quad (1.24)$$

$$r_{max} = n \frac{hc}{d_{hkl}E_{max}} F \quad (1.25)$$

La disposizione dei cristalli è molto importante perché va ad influire sull'area efficace della lente. L'area efficace è dato dal prodotto tra la proiezione dell'area fisica sul piano focale e la funzione di riflettività del cristallo e per far sì che la lente sia efficiente deve mantenersi il più possibile costante su un'ampia banda. Per ottenere questo è necessario che le bande di energia degli anelli contigui siano il più possibile sovrapposte. Utilizzare cristalli a mosaico permette di allargare la banda passante dei singoli cristalli e di ottenere questo effetto, permettendo l'effettiva costruzione della lente.



## Capitolo 2

# Software Monte Carlo e simulazioni

*Il presente Capitolo è composto di tre parti. Nella prima parte viene descritto il codice di simulazione delle prestazioni di una lente di Laue già sviluppato dal gruppo di Astrofisica delle alte Energie del Dipartimento di Fisica e Scienze della Terra. A questo software ho contribuito aggiungendo alcune funzionalità che saranno descritte nel testo. Nella seconda parte ho analizzato alcuni aspetti che concorrono al peggioramento della Point Spread Function (PSF), quali l'errore nel posizionamento dei cristalli sul substrato e la deviazione del loro raggio di curvatura rispetto al raggio nominale della lente di Laue. Infine, nella terza parte presento alcune simulazioni che tengono conto degli effetti discussi facendo il confronto con il risultato ideale.*

### 2.1 Il software Laue Lens Library

Per studiare le prestazioni di ottiche costituite da lenti di Laue, è stato sviluppato un software scritto in linguaggio di programmazione Python. Tramite sia funzioni analitiche, sia tecniche Monte Carlo, permette di simulare struttura e comportamento di una lente di Laue, fissati i parametri fisici della lente quali le dimensioni, la lunghezza focale e i materiali di cui la lente è costituita. In questo Capitolo sarà descritto il software in maniera riassuntiva, mentre alcune caratteristiche particolarmente importanti per l'analisi effettuata verranno descritte più nel dettaglio. In particolare verranno descritte le funzioni sviluppate in questo lavoro di Tesi che hanno contribuito a rendere il software più efficace.

Il software permette di realizzare diversi tipi di lenti di Laue: una lente costituita di un singolo anello di cristalli, di più anelli di cristalli, di un settore di lente (petalo) oppure un singolo cristallo. Ciascuna opzione è trattata come una classe nella programmazione ad oggetti che Python può gestire. Le funzioni che servono alla creazione dei prodotti sono scritte

all'interno di 4 librerie principali, ciascuna delle quali incaricata di gestire un particolare aspetto della costruzione dei prodotti. Le librerie sono:

**Booklet:** contiene tutte le costanti fisiche relative ai materiali di cui i cristalli possono essere costituiti ed altri valori numerici utili alla simulazione della fisica delle lenti.

**Sources:** consente di simulare diversi tipi di sorgente di raggi X. Si possono simulare fascio monocromatico o policromatico, sorgenti estese o puntiformi, sorgenti vicine (quindi in posizione di sorgente di laboratorio) o sorgenti poste all'infinito (sorgente astrofisica).

**Physics:** contiene le definizioni di tutte le funzioni che gestiscono la fisica del sistema. Il calcolo della legge di Bragg, della riflettività dei cristalli ed altre proprietà analoghe sono tutte gestite con questa classe.

**Lenses:** definisce le classi di lente già menzionate, gestendone la struttura geometrica. La classe si suddivide in varie sottoclassi derivate ed ognuna di esse rappresenta una particolare geometria di lente di Laue da simulare. Le sottoclassi sono *SingleXtal*, che simula una lente formata da un solo cristallo, *Ring*, che simula un anello di cristalli, *Rings*, che simula una lente formata da più anelli e *Sector*, che simula un settore circolare composto di n anelli di cristalli.

**Detector:** simula la struttura geometrica di un detector ideale con capacità spettrali e di imaging, del quale si possono definire l'estensione spaziale e le risoluzioni spettrale e angolare. Il rivelatore è definito in modo ideale, quindi con efficienza pari a 1 per ogni energia, cosa non vera nel caso reale.

In Fig. 2.1 è rappresentato lo schema concettuale del programma di simulazione. L'interfaccia utente è costituita dal file *Macro.py*, dove possono essere inseriti manualmente tutti i parametri costruttivi e di simulazione della lente che poi verranno utilizzati dal simulatore. Attraverso questi parametri di input vengono definite le caratteristiche dei cristalli utilizzati, della lente nel suo complesso e del tipo di sorgente produttore di fotoni da focalizzare. Per quel che riguarda i cristalli, è possibile andare a simulare vari tipi di materiali (ad esempio Germanio o Arseniuro di Gallio), i piani cristallini da considerare, la geometria dei cristalli (con possibilità di simulare cristalli piatti o curvi), la relativa mosaicità (con possibilità di simulare anche cristalli perfetti oltre che a mosaico) ed infine la distribuzione dei raggi di curvatura dei cristalli impiegati. Relativamente alla struttura delle lenti, è invece possibile simulare il profilo della lente (piatto o sferico), il filling factor (determinato sia dalla dimensione delle tessere, sia dalla

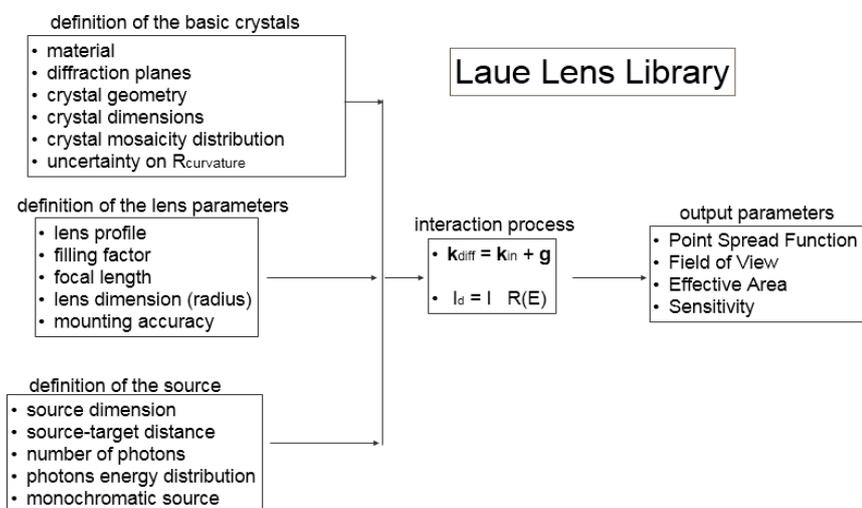


Figura 2.1: Schema concettuale del programma di simulazione, delle varie parti che lo compongono e degli output prodotti.

dimensione del frame che le separerà), il raggio della lente (legato alle energie massime e minime focalizzabili) ed infine l'accuratezza del montaggio, espresso attraverso le distribuzioni di errori angolari simulate. Sfruttando i processi di interazione descritti nel capitolo precedente il programma va quindi a simulare il comportamento di un fascio di fotoni incidenti sulla lente simulata e verranno prodotte varie informazioni e file di output. Risultati fondamentali del programma sono la simulazione della Point Spread Function del sistema ed il calcolo di area efficace, campo di vista e sensibilità della lente simulata. La prima parte della tesi è stata dedicata all'implementazione di nuove funzionalità che vengono impiegate successivamente in questo elaborato. Queste funzionalità hanno diversi scopi: possono permettere di simulare nuove condizioni sperimentali non previste inizialmente (sorgente monocromatica) oppure possono permettere di simulare in modo più accurato e verosimile le condizioni di realizzazione sperimentale di una lente di Laue. In seguito vengono descritte le limitazioni del software precedente alla realizzazione delle nuove funzioni, verranno descritte le nuove funzioni realizzate ed i casi in cui risultano di utilità.

### 2.1.1 Sorgente di radiazione monocromatica

La versione del software alla quale ho contribuito includeva la possibilità di realizzare una sorgente puntiforme o estesa, posta a distanza finita o infinita rispetto al target (lente intera o singolo cristalli diffrangente). Per come era concepito il software, esso non poteva trattare sorgenti di radiazione

monocromatica, ma occorre generare un numero di fotoni appartenente ad una ben definita banda energetica.

La possibilità di realizzare un fascio incidente monocromatico è invece estremamente importante e utile nelle attività nelle quali il nostro laboratorio è coinvolto, per almeno due motivi. Il primo motivo è legato al fatto che spesso può risultare particolarmente utile simulare una sorgente emettente delle righe energetiche ben precise, ad esempio sorgenti radioattive. In laboratorio si fa uso spesso di sorgenti radiattive monocromatiche e tale nuova funzionalità è particolarmente impiegabile per simulare tali condizioni sperimentali. In secondo luogo, benché l'attività principale del gruppo di astrofisica sia quello di realizzare lenti di Laue per banda larga (l'obiettivo è infatti di focalizzare fotoni nell'intervallo di energia 90-600 keV), sono in fase di studio e di avanzato sviluppo anche lenti di Laue per focalizzazione di righe monocromatiche (narrow band Laue lenses). Questo tipo di lenti focalizzanti avrebbe il grande pregio di dedicare tutta l'area efficace soltanto ad una particolare energia, con grande beneficio per quanto riguarda la sensibilità alla rivelazione di quei fotoni. Un esempio, già in parte menzionato nell'introduzione, è quello di poter focalizzare la riga a 511 keV prodotta dall'annichilazione elettrone-positrone, riga osservata al centro della nostra galassia. Un ulteriore sviluppo, questa volta di tipo applicativo terrestre, riguarderebbe la realizzazione di sistemi focalizzanti monocromatici per uso medico diagnostico e terapeutico.

### 2.1.2 Distribuzione del raggio di curvatura dei cristalli

Una lente di Laue è costituita di un grande numero di cristalli opportunamente orientati che tutti insieme concorrono alla focalizzazione della radiazione. Come detto in precedenza, i cristalli possono essere prodotti con i piani di diffrazione incurvati e ciò fa di ciascun cristallo un elemento focalizzante poiché la sua macchia focale è meno estesa della sua dimensione geometrica. Affinché l'effetto di focalizzazione sia efficace occorre che il raggio di curvatura sia esattamente pari a due volte la focale della lente. poiché i cristalli vengono cresciuti in lingotti e successivamente incurvati con procedimenti meccanici, è chiaro che una certa incertezza nella realizzazione della loro curvatura è sempre presente. Per tale motivo il risultato della focalizzazione di tanti cristalli reali non darà come risultato una focalizzazione ideale e di ciò è importante tenere conto. Nel software era già prevista la possibilità di distribuire in maniera uniforme l'incertezza nella realizzazione del raggio di curvatura attorno ad un valore centrale e con ampiezza definita. Il mio contributo è stato quello di includere sia una distribuzione gaussiana delle curvature attorno al valore voluto, definendo quindi  $\sigma$ , sia la possibilità di definire un raggio di valore fissato, diverso dal raggio di curvatura nominale, come a voler simulare che il procedimento di produzione dei cristalli curvi possa essere affetto da un errore

sistematico e tutti i cristalli siano affetti da uno stesso valore dell'errore di incurvamento.

### 2.1.3 Distribuzione dell'errore di posizionamento dei cristalli

Un altro effetto che sarà ampiamente discusso nel seguito, sia dal punto di vista descrittivo, sia relativamente alle simulazioni, è quello legato all'errore nell'orientazione delle tessere cristalline sul substrato comune. La corretta orientazione della singola tessera si ripercuote in un corretto posizionamento della corrispondente immagine diffratta. Chiaramente l'orientazione fisica di un cristallo nello spazio viene definita da tre angoli rispetto ai suoi assi principali avendo definito il **sistema di riferimento di un cristallo** (Fig. 2.2). In realtà il posizionamento dell'immagine diffratta sul piano focale dipende soltanto da 2 di questi angoli, detti  $\theta$  e  $\phi$  rispettivamente attorno a  $z$  e  $x$ . La rotazione attorno all'asse  $y$  non provoca uno spostamento dell'immagine diffratta sul piano del rivelatore.

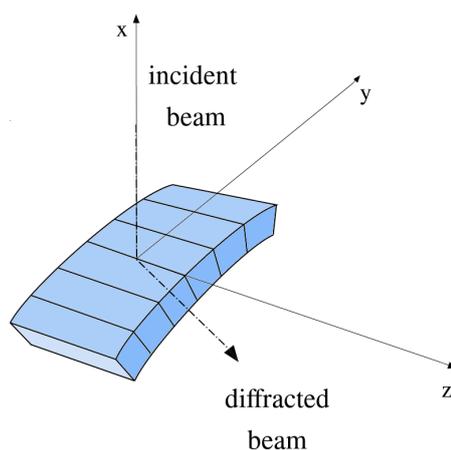


Figura 2.2: Sistema di riferimento adottato per la descrizione delle rotazioni di un cristallo.

Un errore di posizionamento va ad influenzare la posizione del diffratto sul piano focale, quindi se i cristalli presentano un disallineamento rispetto alla loro posizione ottimale le varie immagini non si sovrapporranno più perfettamente e la qualità della PSF verrà ridotta. Per i due angoli di disallineamento, il programma di simulazione prevedeva già la possibilità di simulare una distribuzione uniforme centrata sullo zero. In questo caso ho contribuito aggiungendo la possibilità di simulare una distribuzione gaussiana, caratterizzata da una deviazione standard impostabile come parametro di input e da un valor medio. Il valor medio della gaussiana va quindi a rappresentare un eventuale errore sistematico nel posizionamento. La possibilità di centrare la distribuzione degli errori su un valore diverso dal-

lo zero è stata aggiunta anche per la distribuzione uniforme. Impostando una deviazione standard nulla i cristalli vengono simulati come affetti solo dall'errore sistematico, in modo da poter studiare l'effetto di questo.

## 2.2 Comportamento nominale dei cristalli

Accanto alla definizione di sistema di riferimento del cristallo, definiamo un **sistema di riferimento della lente di Laue** in cui l'asse Z sia parallelo alla direzione di incidenza dei fotoni provenienti dall'infinito, e il piano X-Y sia il piano stesso della lente. Un cristallo posizionato ad un dato angolo e ad un dato raggio dal centro del sistema di riferimento del laboratorio riflette la radiazione in una banda di energia centrata su un valore che rappresenta l'energia nominale del cristallo e corrisponde all'energia diffratta dal piano medio del cristallo a mosaico. La radiazione verrà focalizzata nel fuoco della lente e l'immagine ottenuta non sarà puntiforme, ma avrà una dimensione minima dovuta al valore della mosaicità del cristallo e alla funzione di riflettività di questo. Si fa notare che il cristallo ha simmetria cilindrica e quindi focalizza solo lungo la direzione radiale, mentre l'immagine rimarrà immutata lungo la direzione trasversa. La PSF prodotta quindi avrà una forma rettangolare sul piano X-Y.

Il calcolo della PSF teorica è basata sulla legge di Bragg e sfrutta la funzione di riflettività del cristallo, necessaria per determinare la probabilità che una data energia incidente venga diffratta. Si va poi a determinare il comportamento di un fotone incidente ad una data energia sfruttando la legge di Laue:

$$\vec{k}_i - \vec{k}_d = \vec{g} \quad (2.1)$$

La direzione del vettore  $\vec{k}_i$  è quella di incidenza del fotone, mentre il modulo di  $\vec{k}_i$  è legato all'energia del fotone attraverso la relazione  $|\vec{k}_i| = \frac{E_i}{hc}$ , dove  $E_i$  è l'energia del fotone incidente. Per ogni possibile valore di energia incidente esisterà un opportuno vettore  $\vec{g}$ , chiamato  $\vec{g}_n$  che permetterà la diffrazione [53]. Il vettore d'onda del diffratto viene quindi semplicemente calcolato come:

$$\vec{k}_d = \vec{k}_i - \vec{g}_n \quad (2.2)$$

Per la legge di Bragg, sappiamo che il diffratto è inclinato rispetto alla normale ai piani reticolari di un angolo pari all'angolo di Bragg e, di conseguenza, è inclinato rispetto alla direzione di incidenza di un angolo pari al doppio dell'angolo di Bragg. Per costruzione, i fotoni con un'energia pari all'energia nominale del cristallo vengono portati esattamente nel fuoco della lente. Siccome il cristallo è a mosaico, anche fotoni con energia

non pari all'energia nominale possono essere diffratti, ma l'angolo di Bragg sarà leggermente diverso e di conseguenza i diffratti non saranno esattamente mandati nel fuoco. In particolare, ad energie maggiori della nominale corrispondono angoli minori rispetto a quello medio e viceversa, ad energie minori corrisponderanno angoli maggiori. Questa cosa può essere vista anche semplicemente considerando i vettori coinvolti (Fig. 2.3). I vettori d'onda incidenti saranno tutti diretti lungo l'asse Z e di modulo proporzionale all'energie incidenti, mentre il vettore  $\vec{g}_n$  sarà un vettore di modulo costante pari a  $\frac{2\pi}{d_{h,kl}}$  con una certa orientazione sul piano Z-Y.

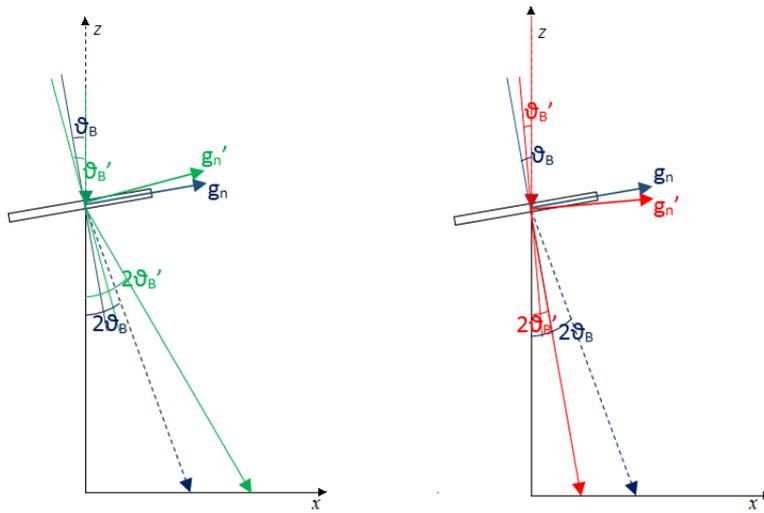


Figura 2.3: In questo disegno vediamo la costruzione di un diffratto nel caso in cui l'energia incidente sia maggiore di quella nominale (immagine a destra) oppure minore (immagine a sinistra). Vediamo chiaramente che il diffratto viene spostato rispetto al fuoco del detector.

Più il modulo di  $\vec{k}_i$  è grande e più nel diffratto prevarrà la direzione verticale, quindi necessariamente l'angolo tra  $\vec{k}_i$  e  $\vec{k}_d$  si deve stringere. Al contrario, se il modulo di  $\vec{k}_i$  è piccolo prevarrà la direzione data da  $\vec{g}_n$  e l'angolo tenderà ad allargarsi. Di conseguenza, fotoni con energia superiore alla media vengono mandati a sinistra del fuoco, mentre fotoni con energia inferiore finiscono a destra. In conseguenza di questo i vari diffratti intercettano il piano focale in punti leggermente diversi e l'immagine risulta allargata e non più puntiforme. Se i fotoni incidenti avessero tutti la stessa probabilità di essere diffratti la PSF sarebbe un rettangolo dai bordi netti la cui larghezza dipende esclusivamente dall'intervallo di energie facenti parte della radiazione policromatica incidente. La probabilità di diffrazione però non è uniforme ed ogni energia viene pesata attraverso la funzione di riflettività del cristallo [54], che esprime il rapporto tra l'intensità del fascio

incidente e l'intensità del diffratto in funzione dell'energia:

$$R = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\sigma T})e^{-\mu(E)\frac{T}{\gamma_0}} \quad (2.3)$$

Dove  $T$  è lo spessore del cristallo,  $\mu(E)$  è il coefficiente di assorbimento per unità di lunghezza ad una data energia e serve a tenere conto degli effetti di estinzione del fascio dovuti allo spessore non nullo della tessera,  $\gamma_0$  è il coseno dell'angolo tra la direzione di incidenza dei fotoni e la normale alla superficie e  $\sigma$  è una funzione espressa come:

$$\sigma = \sigma(E, \delta) = W(\delta)Q(E)f(A) \quad (2.4)$$

Dove  $W(\delta)$  è la distribuzione dei cristalliti e  $Q(E)$ ,  $f(A)$  ed  $A$  dipendono dal materiale e dall'angolo di Bragg della radiazione incidente.

La PSF dipende dalla funzione di riflettività e la sua FWHM sarà necessariamente legata a quella di  $R$ . Si può inoltre osservare che al crescere della mosaicità  $\beta$  del cristallo, la funzione  $R$  tende sempre di più ad assumere una forma gaussiana, mentre se la mosaicità è piccola tende sempre di più ad assomigliare ad una distribuzione a scatola. In generale si può comunque osservare che la funzione  $R$  è maggiore o uguale della FWHM della gaussiana dei cristalliti. Questo è stato ricavato a partire dalle curve di riflettività ottenute dal software di simulazione, che sono state confrontate con la distribuzione dei cristalliti. Conseguenza di questo è che il calcolo della FWHM teorica della PSF prodotta non può semplicemente essere fatto tenendo conto della distribuzione geometrica dei microcristalli, in quanto la funzione di riflettività può significativamente discostarsi da questa, soprattutto in caso di mosaicità basse. Una volta ottenuta la FWHM della riflettività, è necessario determinare la relazione tra l'angolo di incidenza ed il punto d'impatto del diffratto sul piano focale. Si può vedere geometricamente che l'angolo tra la direzione d'incidenza del fotone e la direzione del diffratto è pari a due volte l'angolo di Bragg (anche questo visibile dalla Fig. 2.3). Approssimando per angoli molto piccoli, la distanza sul piano focale tra l'immagine prodotta e la direzione di incidenza è data da:

$$X_B = 2 \theta_B F \quad (2.5)$$

Dove  $F$  è la lunghezza focale della lente. La FWHM della distribuzione di riflettività sarà calcolata tra due angoli di incidenza che chiamiamo  $[\bar{\theta}_{min}, \bar{\theta}_{max}]$ , quindi gli angoli rispetto all'asse  $X$  dei diffratti saranno compresi nell'intervallo  $[2\bar{\theta}_{min}, 2\bar{\theta}_{max}]$ . Chiamando ora  $\Delta\bar{\theta} = \bar{\theta}_{max} - \bar{\theta}_{min}$  la FWHM della distribuzione di riflettività dei cristalli, la dimensione dell'immagine proiettata sul piano focale sarà data da:

$$\Delta X = 2 \Delta\bar{\theta} F \quad (2.6)$$

Dove il fattore 2 deriva appunto dal fatto che per i diffratti l'angolo di Bragg viene raddoppiato. In questo modo è quindi possibile ottenere teoricamente  $\Delta X$ , la FWHM della distribuzione spaziale ottenuta sul piano focale. Il calcolo analitico di questo valore tuttavia non è banale perché la funzione di riflettività ha un'espressione abbastanza complicata, quindi per ora non è stato affrontato. Tuttavia sfruttando il programma di simulazione è possibile ottenere una misura della FWHM della funzione di distribuzione spaziale prodotta da un cristallo e si può immediatamente verificare come questo sia in generale maggiore del valore atteso se venisse presa in considerazione come peso la semplice distribuzione dei cristalliti invece che la riflettività.

## 2.3 Deviazioni dal comportamento ideale

Ad alterare il comportamento del cristallo e peggiorarne la PSF intervengono vari fattori. Due fattori che abbiamo analizzato e spiegato in questa Tesi sono associato ai possibili errori di posizionamento delle tessere sul supporto e all'incertezza nella realizzazione della curvatura dei cristalli. Nei successivi paragrafi andiamo ad analizzare separatamente questi contributi.

### 2.3.1 Incertezza di posizionamento di un cristallo

Gli errori di posizionamento fanno sì che l'immagine diffratta prodotta da un cristallo non venga centrata sul fuoco, ma risulti spostata sul piano focale. Per descrivere questo effetto, consideriamo lo stesso sistema di riferimento precedentemente definito ed andiamo a centrarlo su un singolo cristallo, in modo tale che in condizioni ottimali i lati della tessera siano allineati ai tre assi. Si definiscono quindi degli angoli di disallineamento dalla posizione ottimale  $\theta$  e  $\phi$ . L'angolo  $\theta$  rappresenta un disallineamento dovuto ad una rotazione attorno all'asse  $z$ , mentre l'angolo  $\phi$  rappresenta un disallineamento attorno all'asse  $x$ . Dalla Fig. 2.4 si può vedere come lo shift  $\Delta y$  rispetto al punto focale provocato da  $\theta$  è dato da:

$$\Delta y = F \tan 2\theta \quad (2.7)$$

Dove  $F$  è la lunghezza focale della lente. Dal punto di vista della creazione dell'immagine, una rotazione attorno all'asse  $z$  fa in modo che il diffratto non sia proiettato sul fuoco, ma risulti spostato a destra o a sinistra di questo. Analogamente si vede dalla Fig. 2.5 che una rotazione  $\phi$  attorno all'asse  $x$  induce una rotazione del diffratto sul piano focale. Nel disegno l'effetto è fortemente esagerato in quanto in realtà l'errore di posizionamento

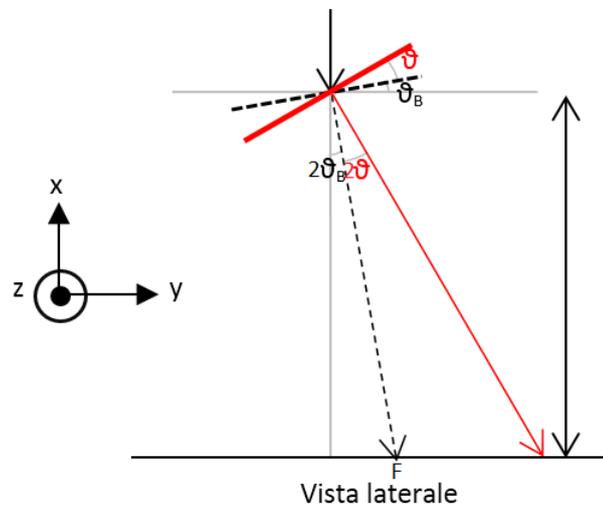


Figura 2.4: Rappresentazione dell'errore provocato dalla rotazione di un angolo  $\theta$  intorno all'asse  $z$ .

sarà dell'ordine di grandezza del secondo d'arco. Si può quindi approssimare ed immaginare che  $\phi$  provochi solo lo spostamento del diffratto in alto o in basso lungo l'asse  $z$ . Con questa ipotesi approssimativa il valore dello spostamento sarà quindi dato da:

$$\Delta z = r \tan \phi \quad (2.8)$$

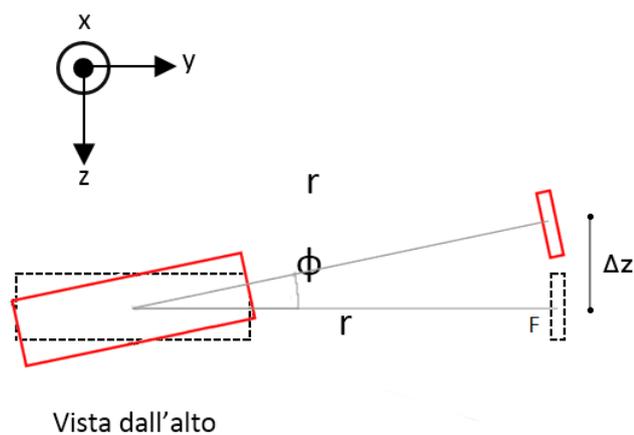


Figura 2.5: Rappresentazione dell'errore provocato dalla rotazione di un angolo  $\phi$  intorno all'asse  $x$ .

Dove  $r$  è il raggio dell'anello a cui appartiene il cristallo. Dato che solitamente l'angolo  $\phi$  è piccolo si può con buona approssimazione considerare che l'immagine diffratta abbia una piccola traslazione verso l'alto o verso il basso di una quantità  $\Delta z$  trascurando lo spostamento perpendicolare. Si nota immediatamente che l'errore di posizionamento indotto da un'incertezza angolare attorno all'asse  $z$  è predominante rispetto a quella indotta da un errore angolare attorno all'asse  $x$  in quanto, per applicazioni astrofisiche, la lunghezza focale è dell'ordine di 10-20 metri mentre il raggio della lente è dell'ordine del metro. Di conseguenza risulta che l'incertezza  $\Delta y$  sarà 10 volte maggiore di  $\Delta z$ .

### 2.3.2 Incertezza associata alla deformazione di un cristallo

Un secondo effetto considerato è quello che tiene conto della deformazione delle tessere cristalline (rispetto al loro raggio di curvatura nominale) che compongono la lente stessa. Le deformazioni della lente consistono in distorsioni del raggio di curvatura dei cristalli, cosa che comporta una variazione della distanza a cui i diffratti vengono focalizzati. Dalla relazione  $F = R/2$ , dove  $F$  è la focale ed  $R$  il raggio di curvatura dei cristalli, deduciamo che ad una variazione del raggio  $\Delta R$  dal suo valore nominale corrisponde una variazione  $\Delta F = \frac{\Delta R}{2}$  della focale. In assenza di distorsioni alla curvatura, se il detector è posizionato sul piano focale nominale, i fotoni vengono focalizzati in una zona molto piccola. Una variazione del raggio di curvatura implica necessariamente un allargamento dell'immagine in quanto viene modificato il fuoco del cristallo, che quindi non focalizzerà più all'altezza del detector. Questo si può vedere da semplici considerazioni geometriche (Fig. 2.6).

È importante notare che una variazione di  $+\Delta R$  non produce lo stesso effetto di una variazione di  $-\Delta R$ . Per studiare il comportamento della variazione di raggio approssimiamo al caso di angolo di Bragg molto piccolo, ovvero si avrà che la normale del cristallo e la direzione di focalizzazione risultano quasi allineate. Quest'approssimazione è sensata perché ai valori di energia diffratta di interesse ( $\gtrsim 100$  keV), gli angoli di Bragg sono dell'ordine di grandezza di qualche grado ed influiscono sulla dimensione dell'immagine focalizzata per un fattore  $\cos 2\theta_B$ , che sarà quindi approssimativamente pari ad 1. Immaginiamo inoltre che la superficie di una singola lente sia in prima approssimazione piatta, cosa lecita in quanto il lato focalizzante delle tessere è lungo  $d_0 = 30$  mm, quindi molto minore del raggio di curvatura dei cristalli. Per ora assumiamo che in condizioni nominali il diffratto venga concentrato in un punto e studiamo separatamente i due casi con  $+\Delta R$  e  $-\Delta R$ . In questa trattazione verranno indicate con l'apice "+" tutte le quantità relative al raggio aumentato rispetto al raggio nominale, mentre verranno indicate con un apice "-" tutte le quantità relative

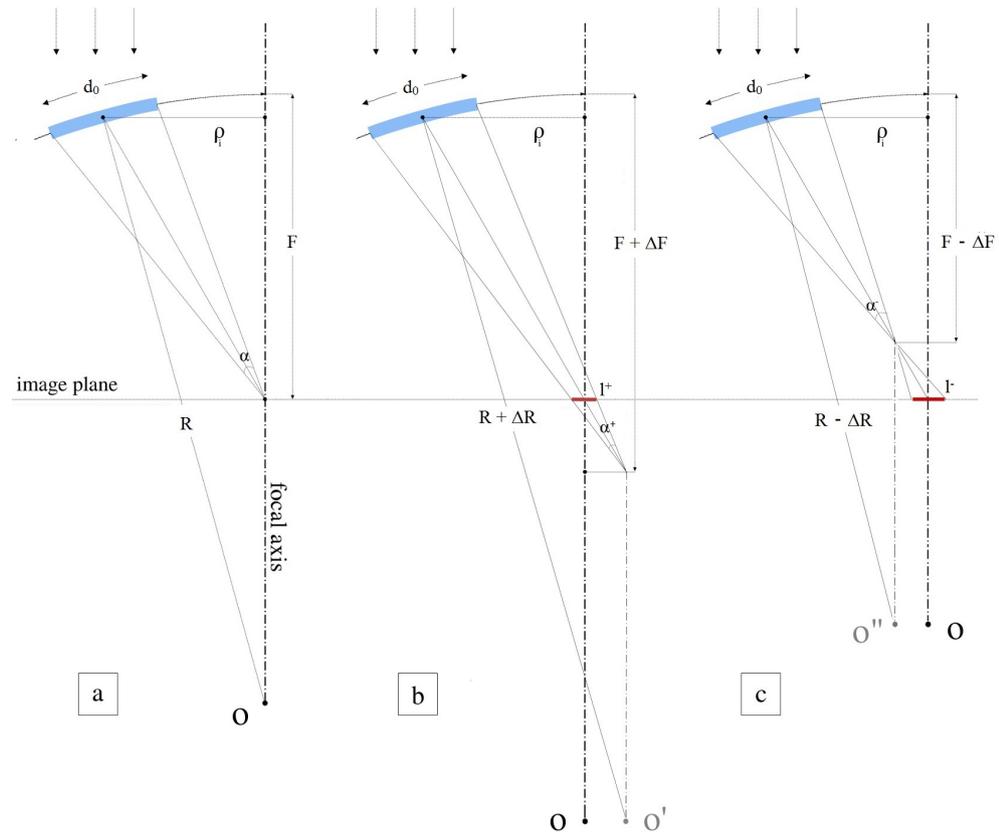


Figura 2.6: Rappresentazione grafica dell'effetto di distorsione del raggio di curvatura rispetto al raggio di curvatura nominale. **a)** caso in cui il raggio di curvatura di un cristallo è pari al valore nominale. **b)** Caso in cui il raggio di curvatura del cristallo è  $R + \Delta R$ . **c)** Caso in cui il raggio di curvatura del cristallo è  $R - \Delta R$ .

al raggio ridotto rispetto alla condizione nominale. Siano quindi:

$$R^\pm = R \pm \Delta R \quad (2.9)$$

Le relative focali saranno:

$$F^\pm = \frac{R^\pm}{2} = \frac{R}{2} \pm \frac{\Delta R}{2} = F \pm \Delta F \quad (2.10)$$

Le dimensioni delle immagini prodotte sul detector nei due casi risultano pari a:

$$l^\pm = \alpha^\pm \Delta F = \frac{d_0}{F^\pm} \Delta F = \frac{d_0 \Delta F}{F \pm \Delta F} = \frac{d_0 \Delta R}{R \pm \Delta R} \quad (2.11)$$

In generale  $l^+$  ed  $l^-$  saranno diversi. Andiamo quindi a calcolare la loro differenza per determinare se, ed in quali condizioni, è possibile trascurare la loro differenza:

$$\Delta l = |l^+ - l^-| = d_0 \Delta R \left| \frac{1}{R - \Delta R} - \frac{1}{R + \Delta R} \right| = \frac{2d_0 \Delta R^2}{R^2 - \Delta R^2} \quad (2.12)$$

La formula così ottenuta permette di stimare con buona approssimazione la differenza di dimensioni tra le immagini prodotte nei due casi. Al limite per cui  $\Delta R \ll R$  la formula può essere scritta come:

$$\Delta l = 2d_0 \left( \frac{\Delta R}{R} \right)^2 \quad (2.13)$$

Questa formula approssimata produrrà un valore più piccolo di quello reale. Andando a calcolare il rapporto tra formula approssimata e formula originale ed imponendo che questo rapporto sia maggiore o uguale di 0.95 otteniamo la condizione:

$$\frac{\Delta F}{F} \leq 0.22 \Leftrightarrow \frac{\Delta R}{R} \leq 0.22 \quad (2.14)$$

Per valori di  $\Delta R$  ed  $R$  che rispettano questo rapporto possiamo quindi essere sicuri che anche applicando la formula approssimata non verrà commesso un errore superiore al 5%. Questa formula può tornare utile per capire quanto la differenza di dimensione tra i due casi possa influire sull'immagine totale, in quanto ci fornisce la differenza tra  $l^+$  ed  $l^-$ . La PSF reale però non è mai puntiforme nemmeno in assenza di errori per via dell'effetto del mosaico. Per ottenere quindi la dimensione totale della PSF è necessario studiare la sovrapposizione tra l'effetto di deformazione radiale e quello dovuto alla mosaicità. A partire da ciò che è stato ricavato, l'allargamento dovuto ad una deformazione radiale può quindi essere scritto come:

$$l_{\Delta R} = d_0 \frac{|\Delta R|}{R + \Delta R} \quad (2.15)$$

In questa espressione, il segno della deformazione è contenuto dentro il valore di  $\Delta R$ , che sarà quindi una quantità negativa nel caso di cristalli con raggio inferiore al nominale, mentre sarà positiva per cristalli con raggio superiore al nominale.  $d_0$  ed  $R$  hanno invece lo stesso significato di prima e nel nostro caso sono  $d_0 = 30$  mm ed  $R = 40$  m. L'allargamento dato dalla mosaicità è invece un valore costante che chiamiamo  $l_0$ . Questo valore può essere ricavato analiticamente con il procedimento illustrato nel paragrafo 2.2, tuttavia il calcolo è abbastanza complesso e non è stato effettuato. Il valore di  $l_0$  è stato quindi ottenuto sfruttando il software di simulazione. Per ricavare la dipendenza da  $\Delta R$  sono state effettuate delle simulazioni in cui è stata fissata una precisa mosaicità e poi è stato variato di volta in volta l'errore sul raggio di curvatura. Sono state poi misurate le PSF così prodotte e si è osservato le dimensioni di queste si mantengono all'incirca costanti e pari alla condizione ideale finché il contributo dato dalla deformazione radiale non supera il valore di  $l_0$ , poi la dimensione della PSF seguirà l'andamento descritto dalla formula 2.15 indipendentemente dal valore della mosaicità del cristallo. Le misure ottenute per mosaicità di 5, 15 e 30 arcosecondi sono riportate nei grafici 2.7, 2.8 e 2.9.

Dai risultati ottenuti possiamo quindi osservare che la funzione che descrive la dimensione totale  $l$  della PSF è in prima approssimazione di tipo:

$$l = \text{Max}\left\{l_0, d_0 \frac{|\Delta R|}{R + \Delta R}\right\} \quad (2.16)$$

Per confermare la validità di questa ipotesi, è stato effettuato un fit sui dati raccolti utilizzando la funzione scritta ed utilizzando  $l_0$ ,  $d_0$  ed  $R$  come parametri per il fit. Si osserva che in tutti e tre i casi la curva ottenuta dal fit ben si adatta ai dati sperimentali ed i parametri misurati hanno valori compatibili con quelli attesi per  $d_0$  ed  $R$ .

Tabella 2.1: Valori ottenuti per i parametri dei fit, con relativi errori.

Mosaicità (arcsec)	PSF FWHM (mm)	PSF FWHM (arcsec)	Dimensione radiale del cristallo (mm)	Raggio di curvatura (m)
5	$1.6 \pm 0.1$	$16 \pm 1$	$29.4 \pm 0.6$	$38 \pm 1$
15	$3.94 \pm 0.09$	$40.6 \pm 0.9$	$29.7 \pm 0.5$	$39.1 \pm 0.9$
30	$6.9 \pm 0.2$	$71 \pm 2$	$30 \pm 1$	$39.3 \pm 1.3$

L'effetto sulla PSF dato da una deformazione radiale si farà sentire solo dopo un certo valore dell'errore. Questo valore, chiamato  $\Delta R^*$ , è calcolabile imponendo che il contributo radiale sia uguale alla dimensione nominale della PSF:

$$l_0 = d_0 \frac{|\Delta R^*|}{R + \Delta R^*} \quad (2.17)$$

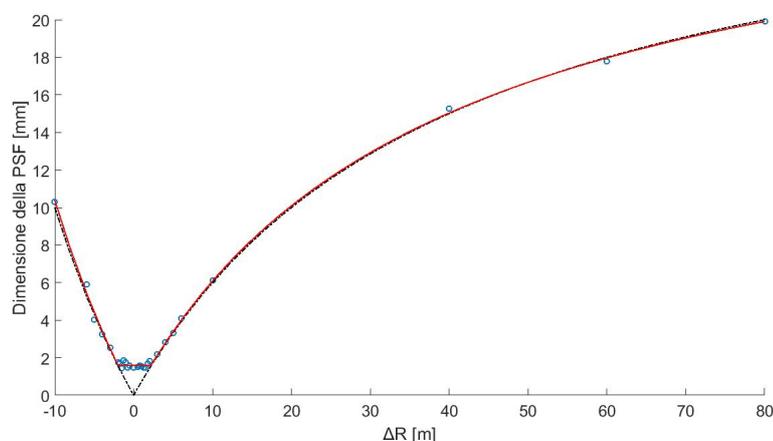


Figura 2.7: Studio degli effetti delle deformazioni radiali su un cristallo di mosaicità pari a 5 arcsec. I punti blu rappresentano i valori determinati dalle simulazioni Monte Carlo, la curva nera tratteggiata rappresenta l'espressione analitica di  $l_{\Delta R}$ , la curva rossa è data dal miglior fit (si veda Tabella 2.1).

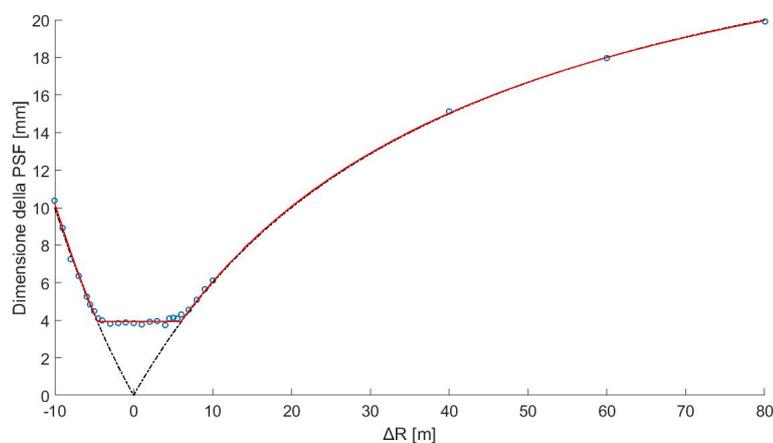


Figura 2.8: Studio degli effetti delle deformazioni radiali su un cristallo di mosaicità pari a 15 arcsec. I punti blu rappresentano i valori determinati dalle simulazioni Monte Carlo, la curva nera tratteggiata rappresenta l'espressione analitica di  $l_{\Delta R}$ , la curva rossa è data dal miglior fit (si veda Tabella 2.1).

Invertendo la relazione si ottiene:

$$|\Delta R^*| = \frac{R}{\frac{d_0}{l_0} \mp 1} \quad (2.18)$$

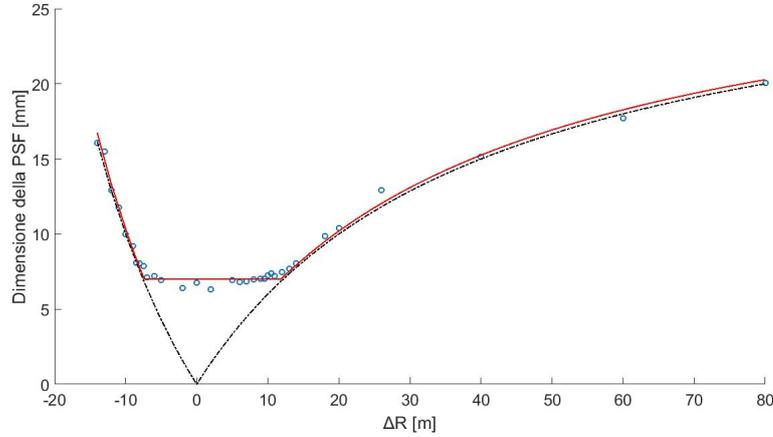


Figura 2.9: Studio degli effetti delle deformazioni radiali su un cristallo di mosaicità pari a 30 arcsec. I punti blu rappresentano i valori determinati dalle simulazioni Monte Carlo, la curva nera tratteggiata rappresenta l'espressione analitica di  $l_{\Delta R}$ , la curva rossa è data dal miglior fit (si veda Tabella 2.1).

Quindi vediamo che  $\Delta R^*$  ha in realtà due possibili valori diversi l'uno dall'altro. Questo è compatibile col fatto che la curva ha una pendenza maggiore per valori di  $\Delta R$  minori di zero, quindi la condizione 2.17 verrà soddisfatta prima rispetto all'altro ramo della curva. Si nota subito infatti che una deformazione del cristallo con segno positivo induce un ingrandimento minore dell'immagine rispetto al caso in cui il raggio del cristallo è ridotto rispetto al nominale. Per la costruzione della lente, a parità di valore assoluto dell'errore sul raggio di curvatura, è preferibile quindi utilizzare cristalli con un raggio maggiore del nominale, in quanto la deformazione dell'immagine sarà minore. Ipotizzando di essere invece nel caso per cui la deformazione induce un effettiva distorsione sulla PSF, è interessante anche confrontare gli ingrandimenti con la dimensione della PSF nominale di un singolo cristallo, andando a calcolare:

$$\frac{l^{\pm}}{l_0} = \frac{d_0}{l_0} \frac{\Delta R}{R \pm \Delta R} \quad (2.19)$$

Dal rapporto tra  $l^{\pm}$  e  $l_0$  vediamo che al limite per cui  $d_0 \ll l_0$  l'ingrandimento diventa trascurabile rispetto alla dimensione della PSF nominale, situazione però non fisicamente sensata in quanto  $d_0$  è la dimensione del lato focalizzante del cristallo ed  $l_0$  la dimensione del diffratto, quindi necessariamente vale la relazione  $l_0 < d_0$ . Unica condizione fisicamente realizzabile che permette di ottenere un ingrandimento molto piccolo è che la deformazione dei cristalli sia molto piccola rispetto al raggio di curvatura.

Tenendo conto che  $\frac{d_0}{l_0} \geq 1$  ed ipotizzando  $\Delta R \ll R$ , si ottiene:

$$\frac{l^\pm}{l_0} \geq \frac{\Delta R}{R} \quad (2.20)$$

Si vede quindi che il rapporto tra gli ingrandimenti e l'immagine nominale scala con il rapporto tra  $\Delta R$  ed  $R$ , mentre la differenza di lunghezza  $\Delta l$  tra i due ingrandimenti scala con il quadrato di questo rapporto. Questo vuol dire che  $l^\pm$  tendono allo stesso valore più velocemente di quanto  $\frac{l^\pm}{l_0}$  tenda a 0, quindi a seconda del valore di  $\frac{\Delta R}{R}$  vedrò diversi effetti di distorsione dell'immagine. Per grandi valori di questo rapporto vedrò sia l'ingrandimento dell'immagine rispetto a  $l_0$ , sia la differenza di dimensione dell'immagine ingrandita tra i casi di deformazione positiva e deformazione negativa. Al diminuire di  $\frac{\Delta R}{R}$  si avrà una situazione in cui l'ingrandimento rispetto al caso nominale è chiaramente evidente, ma si avrà  $l^+ \approx l^-$  e posso ipotizzare che le due deformazioni producano lo stesso effetto sull'immagine. Quando poi  $\frac{\Delta R}{R}$  sarà molto piccolo si rientrerà di nuovo nel regime dominato dal contributo di mosaicità, quindi l'allargamento dato dal contributo radiale diventerà in ogni caso nullo e si vedrà solo l'effetto della mosaicità.

Nel nostro caso, i cristalli utilizzati in laboratorio hanno una mosaicità media proprio di 15 arcsec, quindi i due valori limite oltre ai quali l'influenza della deformazione radiale comincia a farsi sentire risultano pari  $(-5 \pm 1)$  m e  $(6 \pm 2)$  m. Si osserva che la distribuzione dei raggi è una gaussiana con FWHM proprio di circa 5 m, quindi i cristalli così deformati da produrre un effetto di distorsione molto forte sulla PSF saranno fortunatamente pochi e, nelle nostre condizioni di lavoro, questo errore ha un'influenza sul peggioramento della PSF totale decisamente minore degli effetti dovuti ad errori di posizionamento. Ci aspettiamo quindi che la deformazione radiale dei cristalli non produca una distorsione particolarmente significativa della PSF totale della lente, soprattutto nel caso in cui vengano utilizzati molti cristalli che per la maggior parte non produrranno distorsioni, andando quindi a mascherare l'effetto di quelli deformati.

## 2.4 Studio degli errori sperimentali misurati

Questa Tesi è volta ad un'analisi preliminare alla realizzazione di un prototipo di lente di Laue i cui cristalli vengano posizionati con una accuratezza migliore rispetto a quanto ottenuto fino ad ora. Occorre però un punto di partenza, cioè vogliamo confrontare il prossimo risultato sperimentale con simulazioni che tengano conto di accuratezze ragionevolmente ottenute. Abbiamo quindi impiegato i valori di raggi di curvatura stimati per un campione di cristalli realizzato per il progetto Laue e di errori di posizionamento ottenuti da un precedente test.

In generale, dato un campione, media e deviazione standard, con relativi errori, si determinano dalle seguenti equazioni:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{N} \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (2.21)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad \sigma_s = \frac{s}{\sqrt{2(N - 1)}} \quad (2.22)$$

Per la trattazione statistica di entrambe le incertezze in oggetto ci avvaliamo di queste formule.

### 2.4.1 Distribuzioni degli errori di deformazione dei cristalli

In un campione di cristalli, ciascuno è caratterizzato dal proprio raggio di curvatura e dalla propria mosaicità. A questi parametri sarà associata un'incertezza, quindi risulta necessario determinare una distribuzione d'errore. Sono stati utilizzati i dati misurati in precedenza, effettuate su 60 cristalli, un numero sufficiente per determinare le distribuzioni di questi due parametri con buona precisione. Abbiamo ipotizzato che entrambe le distribuzioni di raggio di curvatura e mosaicità seguano un profilo gaussiano (Fig. 2.10 e Fig. 2.11).

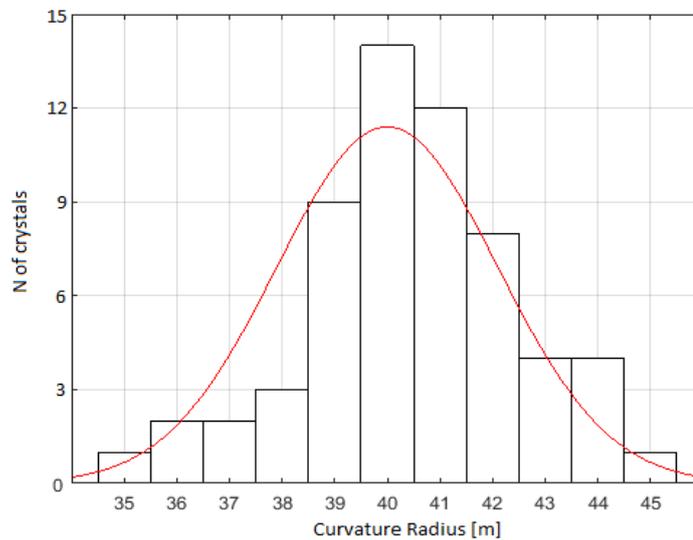


Figura 2.10: Distribuzione dei raggi di curvatura misurati.

Essendo la statistica abbastanza elevata, per determinare media e deviazione standard delle gaussiane sono state impiegate le formule 2.21 e 2.22.

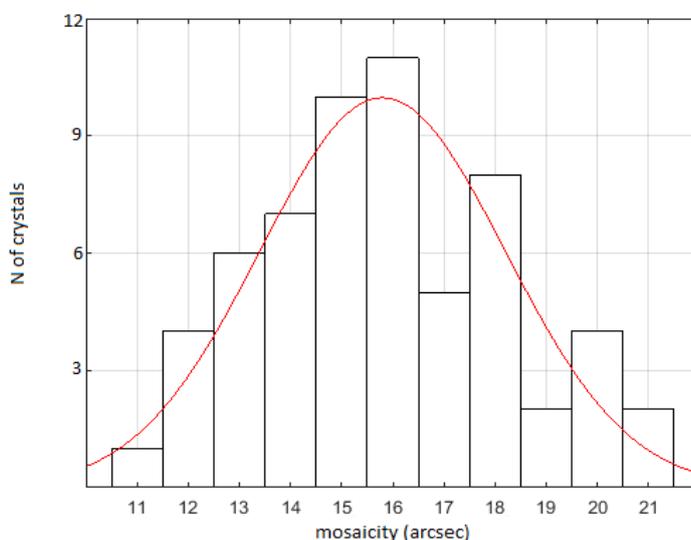


Figura 2.11: Distribuzione delle mosaicità misurate.

In particolare, la distribuzione dei raggi di curvatura risulta avere una valore medio di  $(40.4 \pm 0.3)$  m ed una deviazione standard di  $(2.1 \pm 0.2)$  m. Andando a fittare i dati con una gaussiana con media e deviazione standard pari a quelle misurate dal campione, il valore del  $\chi^2$  ridotto risulta pari a 0.6, quindi possiamo ipotizzare con abbastanza sicurezza che la distribuzione dei raggi di curvatura segua una distribuzione gaussiana. Per le mosaicità si ottiene invece una distribuzione gaussiana con media di  $(15.8 \pm 0.3)$  arcsec ed una deviazione standard di  $(2.4 \pm 0.2)$  arcsec. In questo caso si ottiene un  $\chi^2$  ridotto pari a 1.05, quindi possiamo ritenere che la distribuzione delle mosaicità dei cristalli sia una gaussiana. Per produrre le simulazioni è stata simulata la distribuzione dei raggi di curvatura con i parametri misurati, ma non è stata simulata la distribuzione delle mosaicità in quanto il codice attualmente non implementa questa funzione.

Facciamo inoltre notare che nei cristalli reali è presente un altro effetto di deformazione di cui non si è ancora tenuto conto nel codice. Nei cristalli reali è possibile che ci sia una deformazione del cristallo lungo l'asse non focalizzante che provoca la perdita della simmetria cilindrica della curvatura. Questo induce una deformazione della PSF, che non avrà più una forma rettangolare, ma sarà incurvata (Fig. 2.12). Questo effetto indesiderato è sicuramente da imputare a distorsioni macroscopiche della tessera provocate dai processi di lavorazione. Per spiegare questo effetto possiamo immaginare il cristallo diviso in tante fette orizzontali (Fig. 2.13). Ciascuna fetta presenta lo stesso raggio di curvatura, ma l'immagine diffratta della singola fetta può risultare disallineata rispetto alle altre focalizzando ad una

posizione diversa sul piano del rivelatore, una banda di energia leggermente diversa da quella nominale. Questo farà sì che i diffratti prodotti da ogni singola striscia non siano perfettamente allineati a formare una Fig. rettangolare, ma saranno spostati uno rispetto all'altro, deformando la Fig.. Il programma di simulazione non tiene ancora conto di questo effetto, quindi le immagini prodotte da un cristallo singolo simulato risultano tutte rettangolari.

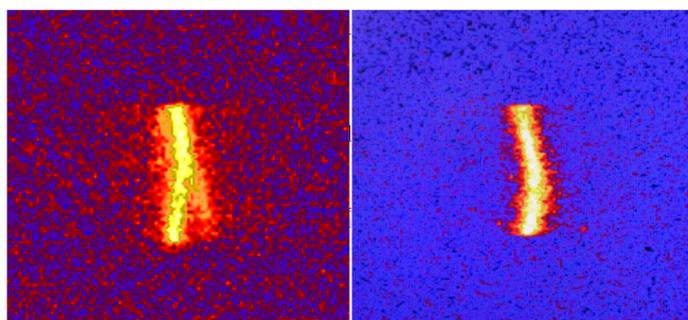


Figura 2.12: Effetto di distorsione dell'immagine reale prodotta da una disuniformità lungo l'asse non focalizzante del cristallo.

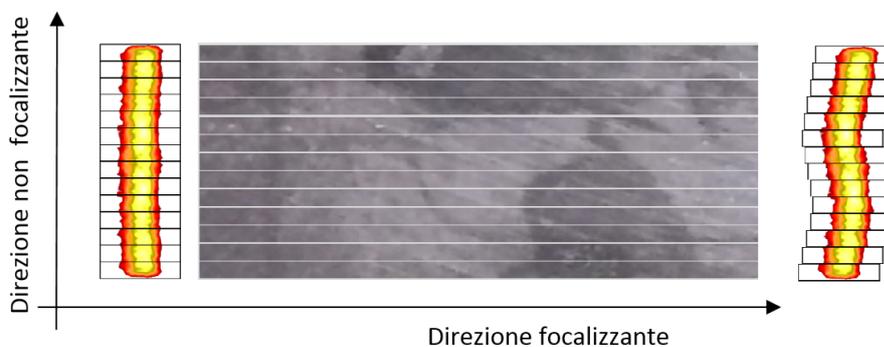


Figura 2.13: Schematizzazione dell'effetto di distorsione della simmetria cilindrica nei cristalli reali. Al centro è riportata la rappresentazione di un cristallo, suddiviso idealmente in fette trasversali. **Sinistra:** immagine di diffrazione ottimale. Tutte le fette si comportano allo stesso modo. **Destra:** immagine diffratta dal campione nel caso in cui ciascuna fette non focalizzi perfettamente sulla linea ideale.

### 2.4.2 Incertezza nel posizionamento dei cristalli

Per la distribuzione degli errori di posizionamento attese sono state effettuate delle prove di incollaggio dei cristalli e l'angolo di disallineamento è stato calcolato in base alla posizione effettivamente misurata del diffratto. I cristalli sono stati fissati su di un substrato con l'intento di concentrare il segnale diffratto in un pixel di riferimento del rivelatore per immagini. Benché i cristalli curvi siano focalizzanti, essi focalizzano la radiazione soltanto nella direzione di curvatura (lungo l'asse  $y$  del cristallo), mentre nell'altra direzione i fotoni non vengono concentrati. Il segnale diffratto è focalizzato ma viene distribuito su di un'area estesa del rivelatore, dato che ciascun pixel del detector per immagini ha una risoluzione spaziale di  $200 \mu\text{m}$ . Si ottiene quindi un alone diffuso che rappresenta l'immagine diffratta e focalizzata prodotta da un cristallo (Fig. 2.14).

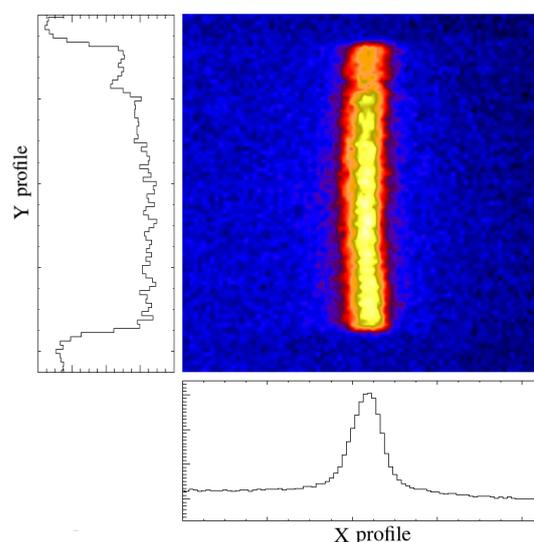


Figura 2.14: Diffratto reale osservato dal detector. Si può chiaramente vedere la differenza tra i profili misurati sull'asse  $X$  e sull'asse  $Y$ . L'immagine sull'asse  $X$  segue un profilo gaussiano, mentre sull'asse  $Y$  segue chiaramente un profilo a scatola.

La condizione ideale è quella in cui il centroide di questo segnale diffratto coincide con la posizione di riferimento. Il centroide di questo segnale viene determinato facendo un fit con una funzione gaussiana lungo la direzione  $X$  e un profilo a rettangolo lungo la direzione  $Y$ . In questo modo si possono determinare i valori medi delle due distribuzioni e localizzare il centro del diffratto. Grazie al fit su entrambe le direzioni otteniamo una stima del posizionamento del diffratto più accurata (inferiore ai  $20 \mu\text{m}$ ) rispetto alla risoluzione del rivelatore. In condizioni reali il centroide del segnale diffratto sarà spostato di una quantità  $\Delta X$  lungo l'asse  $X$  e  $\Delta Y$  lungo l'asse

$Y$  per effetto degli errori già descritti nel paragrafo 2.3 (Fig. 2.14). Una volta determinata l'entità dello spostamento del centroide dell'immagine diffratta rispetto alla posizione nominale, gli angoli di disallineamento si possono calcolare come:

$$\theta = \frac{\Delta X}{2F} \quad (2.23)$$

$$\phi = \frac{\Delta Y}{r} \quad (2.24)$$

Propagando l'errore si ottiene che l'incertezza di misura sugli angoli di disallineamento è dell'ordine di circa un arcosecondo sia per  $\theta$  che per  $\phi$ . Utilizzando questa procedura sono stati incollati 11 cristalli, quindi sono state determinate 11 coppie di incertezza angolare ( $\theta$  e  $\phi$ ) mediante i quali analizziamo l'accuratezza del fissaggio dei cristalli al substrato.

Benché i dati raccolti abbiano bassa statistica (soltanto 11 cristalli non rappresentano un campione molto significativo, anche perché una lente di Laue sarà composta di migliaia di cristalli) cerchiamo di determinare il tipo di distribuzione degli errori ed i parametri che caratterizzano questa distribuzione con ragionamenti statistici. Ci chiediamo in primo luogo se i dati in nostro possesso seguano una distribuzione e, in caso positivo, quale distribuzione seguano. Dal plot dei dati misurati (Fig. 2.15) si può osservare che questi punti sembrano distribuiti casualmente sul piano e gli errori non correlati tra di loro, e non è semplice dedurre se i dati raccolti siano distribuiti secondo una funzione di probabilità uniforme, gaussiana o di altro tipo.

Dato che il fissaggio di una grande quantità di cristalli è un processo indipendente per ciascuna tessera e che l'obiettivo è quello di "centrare" un pixel di riferimento con ciascuna immagine diffratta, è ragionevole assumere che l'errore di fissaggio sia distribuito in modo gaussiano. Si hanno infatti una quantità di fattori casuali che vanno ad influire sul posizionamento del cristallo, quali ad esempio il ritiro dell'adesivo durante la sua fase di polimerizzazione, gli errori del sistema di afferraggio meccanico, gli sbalzi termici ambientali, la quantità di colla utilizzata per ciascuna tessera cristallina, che insieme concorrono a disallineare il cristallo e produrranno una distribuzione d'errore totale presumibilmente gaussiana. Per stimare i parametri della distribuzione gaussiana abbiamo deciso di utilizzare un approccio statistico diverso rispetto alla stima di media e deviazione standard, ma si è calcolato un intervallo di confidenza per questi parametri. L'analisi statistica è stata eseguita sia su  $\theta$  che su  $\phi$  utilizzando due diversi approcci descritti nel seguito.

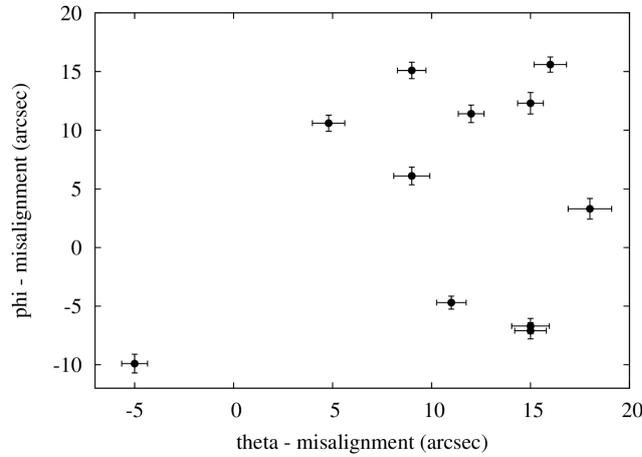


Figura 2.15: Valori di disallineamento misurati sui singoli cristalli. Ogni punto rappresenta un cristallo e sugli assi sono riportati i valori degli angoli di disallineamento misurati. Sull'asse x è riportato l'angolo  $\theta$ , mentre sull'asse y è riportato l'angolo  $\phi$ .

### Primo metodo

Per il primo metodo il valore della media è stato assunto noto e pari alla media effettiva del campione. Per la deviazione standard abbiamo invece stimato un intervallo di confidenza, quindi un valore massimo ed un valore minimo per l'insieme dei possibili valori di questo parametro che ci aspettiamo di trovare. Chiamiamo quindi  $\mu$  la media della gaussiana,  $\sigma$  la sua varianza e  $\hat{v}$  la quantità:

$$\hat{v} = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{N} \quad (2.25)$$

L'intervallo di confidenza per  $\sigma$  viene calcolato tenendo conto che la varianza campionaria segue una distribuzione di tipo  $\chi^2$  con un numero di gradi di libertà pari al numero N di dati:

$$\frac{N\hat{v}}{\chi_{1-\frac{\delta}{2}}^2(N)} < \sigma^2 < \frac{N\hat{v}}{\chi_{\frac{\delta}{2}}^2(N)} \quad (2.26)$$

Dove  $\delta$  è il grado di confidenza scelto. È stato quindi imposto  $\mu = \bar{x}$  (cioè  $\bar{\theta}$  e  $\bar{\phi}$ ) eseguendo i calcoli al 90%, 95% e 99% di confidenza. Abbiamo quindi ottenuto rispettivamente per gli angoli  $\theta$  e  $\phi$  i seguenti valori:

$$\bar{\theta} = 11 \pm 2 \text{ arcsec} \quad (2.27)$$

$$s_{\theta} = 7 \pm 2 \text{ arcsec} \quad (2.28)$$

$$\bar{\phi} = 4 \pm 1 \text{ arcsec} \quad (2.29)$$

$$s_{\phi} = 10 \pm 2 \text{ arcsec} \quad (2.30)$$

Assumendo quindi  $\mu$  nota, gli intervalli di confidenza calcolati sia per  $\theta$  che  $\phi$  sono presentati in tabella 2.2.

Tabella 2.2: Intervalli di confidenza per  $\mu$  per la distribuzione dell'angolo  $\theta$ .

Livello di confidenza	Intervallo di confidenza per $\sigma_{\theta}$ [arcsec]	Intervallo di confidenza per $\sigma_{\phi}$ [arcsec]
90%	$4.7 < \sigma < 9.8$	$7.5 < \sigma < 15.7$
95%	$4.5 < \sigma < 10.7$	$7.1 < \sigma < 17.2$
99%	$4.0 < \sigma < 12.9$	$6.5 < \sigma < 20.8$

### Secondo metodo

In alternativa, si può anche non considerare  $\mu$  nota a priori e cercare un intervallo di confidenza anche su questo parametro. Il calcolo è basato sul fatto che la media segue una distribuzione di Student, quindi si avrà:

$$\bar{x} - t_{1-\frac{\delta}{2}}(N) \frac{s}{\sqrt{N}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\frac{\delta}{2}}(N) \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (2.31)$$

Dove  $\bar{x}$  ed  $s$  sono la media e la deviazione standard campionarie. L'intervallo di confidenza sulla varianza si ottiene sempre considerando una distribuzione  $\chi^2$ , stavolta con  $N - 1$  gradi di libertà:

$$\frac{(N-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\delta}{2}}^2(N-1)} < \sigma^2 < \frac{(N-1)s^2}{\chi_{\frac{\delta}{2}}^2(N-1)} \quad (2.32)$$

Seguendo questo approccio, nelle tabelle 2.3 e 2.4 sono rappresentati gli intervalli di confidenza calcolati nell'ipotesi in cui  $\mu$  (cioè  $\bar{\theta}$  e  $\bar{\phi}$ ) non siano noti.

Tabella 2.3: Intervalli di confidenza per  $\mu$  e  $\sigma$  per la distribuzione dell'angolo  $\theta$ .

Livello di confidenza	Intervallo di Confidenza per $\mu$ [arcsec]	Intervallo di Confidenza per $\sigma$ [arcsec]
90%	$8.3 < \mu < 13.7$	$4.8 < \sigma < 10.5$
95%	$6.6 < \mu < 15.4$	$4.6 < \sigma < 11.6$
99%	$5.6 < \mu < 16.4$	$4.3 < \sigma < 14.2$

Tabella 2.4: Intervalli di confidenza per  $\mu$  e  $\sigma$  per la distribuzione dell'angolo  $\phi$ .

Livello di confidenza	Intervallo di Confidenza per $\mu$ [arcsec]	Intervallo di Confidenza per $\sigma$ [arcsec]
90%	$0.2 < \mu < 8.1$	$7.1 < \sigma < 15.4$
95%	$-2.2 < \mu < 10.6$	$6.8 < \sigma < 17.0$
99%	$-3.7 < \mu < 12.1$	$6.3 < \sigma < 20.8$

Evidentemente osserviamo che gli intervalli di confidenza sono tutti piuttosto larghi, e ciò è inevitabile per la bassa statistica provocata dal limitato numero di processi di posizionamento e incollaggio delle tessere. Per produrre le successive simulazioni abbiamo scelto di impiegare il primo metodo e quindi di adottare i parametri suggeriti da questo metodo. Abbiamo cioè fissato il valor medio per i due angoli di posizionamento pari alla loro media campionaria e utilizzato un intervallo di confidenza del 95% per il valore della deviazione standard. Scegliamo di impiegare un valore fissato per la media poiché i dati raccolti ci fanno sospettare che esista un errore sistematico dovuto ad un ritiro asimmetrico della colla, che concorre a ruotare la maggior parte dei cristalli da un lato e quindi induce un errore sistematico sul posizionamento delle tessere. Dato che abbiamo determinato un intervallo di confidenza su  $\sigma$ , nel seguito abbiamo distinto il caso in cui si è usato il suo valore di soglia superiore (nel seguito **upper limit**, cioè il caso più conservativo) da quello in cui si è considerato il valore di soglia inferiore (nel seguito **lower limit**, cioè il caso più favorevole).

## 2.5 Comportamento di un anello di cristalli

Un anello di cristalli consiste in una serie di  $n$  cristalli posizionati tutti alla stessa distanza dall'asse perpendicolare al piano focale passante per il fuoco e distanziati tra di loro di un angolo pari a  $\frac{2\pi}{n}$ , in modo da coprire un angolo giro. Parametro importante nella costruzione della lente è la di-

mensione del frame che andrà a separare i vari cristalli e quindi ridurrà lo spazio disponibile per questi. È importante notare che i cristalli presenti su un anello saranno tutti orientati allo stesso modo rispetto alla radiazione incidente, quindi nel complesso diffrangeranno una sola energia, o meglio, una banda di energia centrata attorno al valore di energia nominale. La PSF prodotta da un anello di cristalli però è diversa da quella prodotta da una singola tessera in quanto è la somma delle singole immagini diffratte prodotte dai cristalli. Le immagini di diffrazione si sovrapporranno sul fuoco, creando un picco di conteggi molto pronunciato al centro (Fig. 2.16). Gli errori già descritti per il posizionamento e la forma dei singoli cristalli si ripercuoteranno sulla PSF dell'intero anello. Con l'introduzione di errori di posizionamento, tutti i diffratti non saranno più centrati sul fuoco, ma saranno spostati in modo proporzionale all'errore commesso. In particolare si può vedere che l'introduzione di un errore di posizionamento sistematico allontana radialmente tutti i cristalli dal centro di una quantità fissa, quindi la PSF non sarà più di forma circolare, ma tenderà ad assumere una forma toroidale. Gli errori sulla curvatura vanno poi a sfocare l'immagine, riducendo l'intensità del picco centrale ed allargando la PSF totale. La PSF finale sarà quindi notevolmente allargata rispetto al caso ideale ed il picco di conteggi non sarà sul centro del detector, ma si distribuirà su una forma approssimativamente circolare attorno ad esso. Gli effetti dell'introduzioni di vari tipi di errore sono presentati nelle figure seguenti.

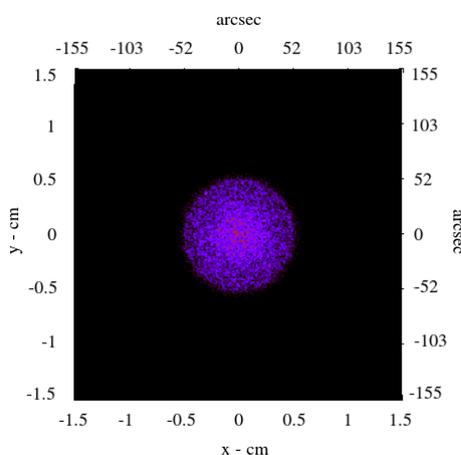


Figura 2.16: Simulazione di PSF prodotta da un anello di cristalli curvi ( $R=40$  m) di GaAs (111) di dimensioni  $30 \times 10 \times 2$  mm focalizzanti fotoni di 135 keV. I cristalli sono posizionati in modo nominale e tutti i cristalli hanno raggio di 40 m. Immagine ottenuta simulando  $10^5$  fotoni incidenti.

Le simulazioni presentate sono basate sui dati sperimentali raccolti relativamente alle distribuzioni di incertezza del posizionamento e dell'incertezza nella realizzazione della curvatura. Le incertezze nel posiziona-

mento producono un'evidente peggioramento dell'immagine quando vengono introdotti nelle simulazioni. In Fig. 2.17 è presentata la PSF risultante quando è stato introdotto solo un errore sistematico di 11 arcsec per l'angolo  $\theta$  e di 4 arcsec per l'angolo  $\phi$ , come suggerito dai dati sperimentali. E' evidente un netto peggioramento della PSF rispetto al caso di montaggio ideale.

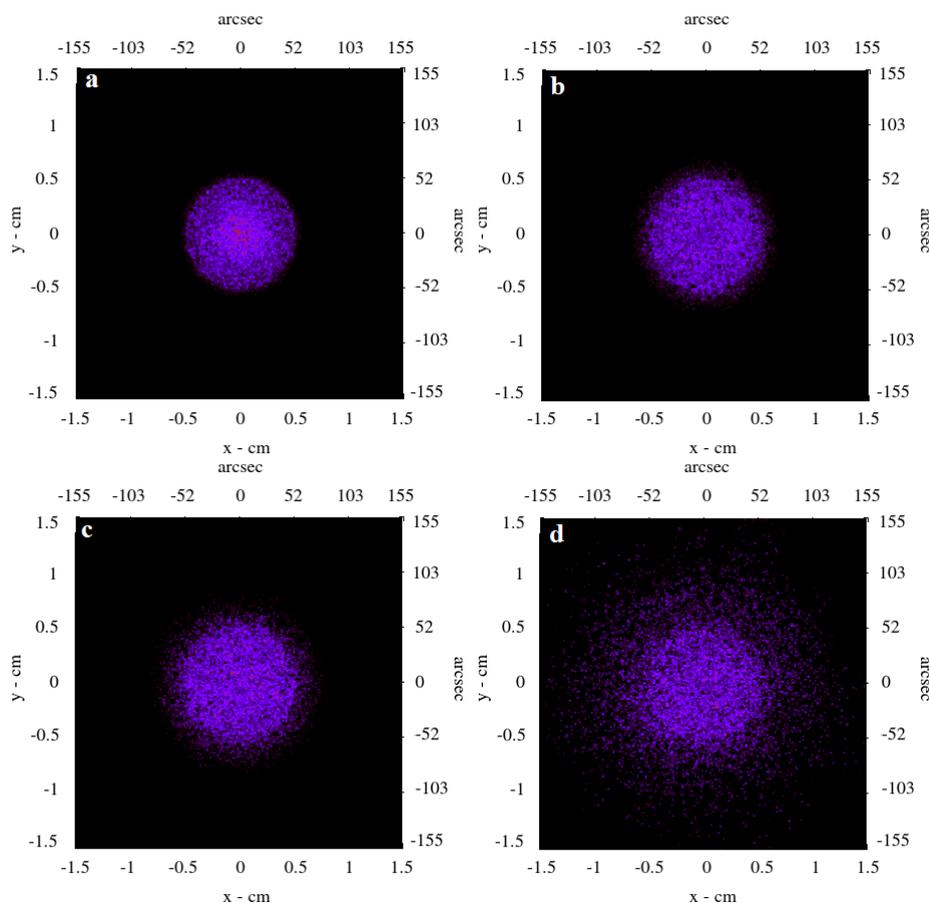


Figura 2.17: ISimulazione di PSF prodotta da un anello di cristalli curvi ( $R=40$  m) di GaAs (111) di dimensioni  $30 \times 10 \times 2$  mm focalizzanti fotoni di 135 keV. Immagini ottenute simulando  $10^5$  fotoni incidenti. **a)** PSF nominale. **b)** Errore sistematico di 11 arcsec per l'angolo  $\theta$  e di 4 arcsec per l'angolo  $\phi$ . **c)** Oltre all'errore sistematico (11 arcsec per  $\theta$  e 4 arcsec per  $\phi$ ) è stato aggiunto (in alto) una distribuzione di incertezza uniforme con ampiezze  $\Delta\theta = 10.7$  arcsec e  $\Delta\phi = 17.0$  arcsec. **d)** distribuzione gaussiana  $\sigma_\theta = 10.7$  arcsec e  $\sigma_\phi = 17.0$  arcsec. (I valori scelti sono consistenti con quanto discusso nel paragrafo 2.4.1).

In Fig. sono anche riprodotte le PSF simulate introducendo, oltre al-

l'incertezza sistematica su entrambi gli angoli come in precedenza, anche una distribuzione uniforme e gaussiana, rispettivamente. È quindi particolarmente evidente la necessità di un controllo del posizionamento il più possibile accurato durante la fase di montaggio, soprattutto nel caso in cui seguano una distribuzione di tipo gaussiano.

In modo analogo abbiamo valutato l'effetto di una deformazione radiale sistematica (tutti i cristalli affetti da curvatura errata della stessa quantità) e confrontata con una distribuzione dei raggi di curvatura seguenti distribuzione uniforme o gaussiano. I risultati sono riportati per completezza in Fig. 2.18 in cui sono riportate le PSF nominale e quelle affette da errori (sistematico, con distribuzione gaussiana e con distribuzione uniforme). Dal confronto si deduce che l'effetto provocato da una deformazione radiale, con i valori da noi introdotti, non provoca un sensibile deterioramento della PSF.

In conclusione, è stato valutato l'effetto sulla PSF di tutti i tipi di errore agenti in modo concomitante, con un maggior numero di fotoni incidenti che offre maggior statistica ( $10^6$  fotoni). La PSF che si può osservare in Fig. 2.19 è stata prodotta utilizzando il valore più grande dell'intervallo di confidenza per  $\sigma$  calcolato. La distribuzione dei fotoni è visibilmente peggiorata rispetto al caso ideale e ciò si può anche osservare nella Fig. 2.20 dove è mostrato il profilo della distribuzione dei fotoni nel caso nominale confrontato con il caso in cui si è preso il valore più piccolo dell'intervallo di confidenza per  $\sigma$  calcolato e con quello in cui si è preso il valore più grande dell'intervallo di confidenza per  $\sigma$ .

Le dimensioni delle PSF misurate sia nel caso ideale, sia nei due casi affetti da tutti gli errori possibili sono riportati in tabella 2.5, mentre in Fig. 2.20 è riportato il profilo lungo l'asse  $x$  prodotto dai tre anelli simulati. L'allargamento provocato dalla presenza degli errori è ben visibile sia nel caso migliore, che nel caso peggiore. Le tre simulazioni confrontate sono state prodotte con un numero di fotoni maggiore rispetto alle altre, in modo da ottenere una PSF più precisa.

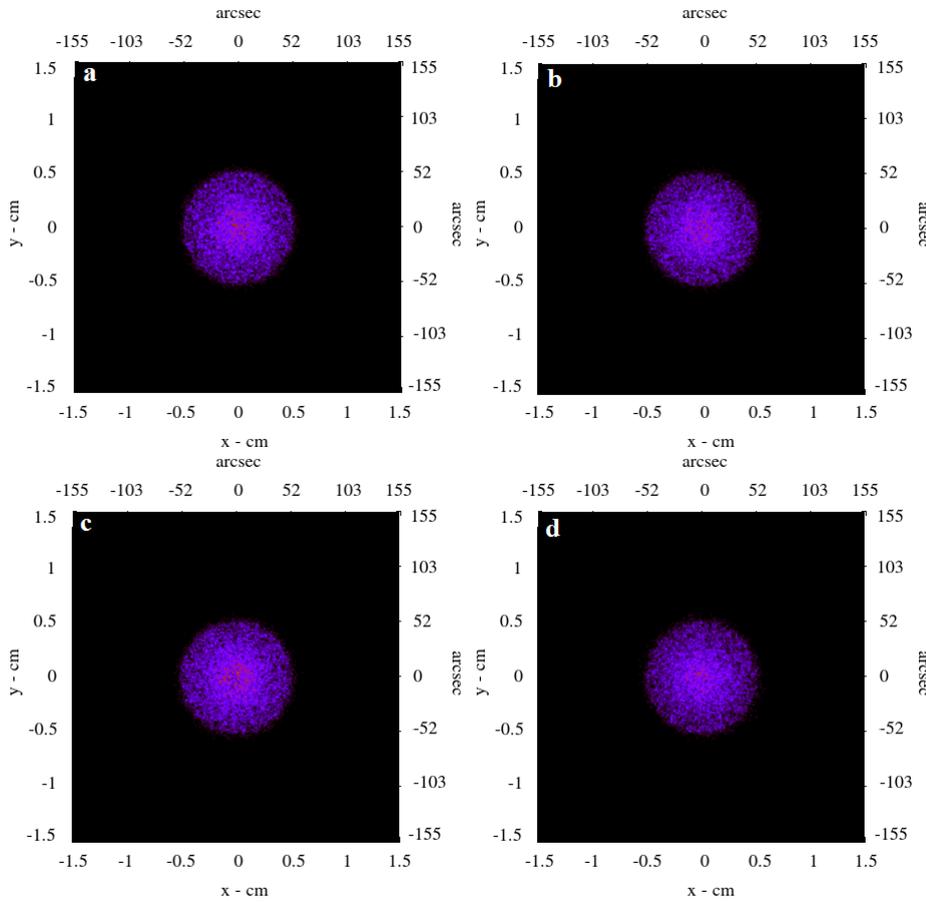


Figura 2.18: Ssimulazione di PSF prodotta da un anello di cristalli curvi ( $R=40$  m) di GaAs (111) di dimensioni  $30 \times 10 \times 2$  mm focalizzanti fotoni di 135 keV. Immagini ottenute simulando  $10^5$  fotoni incidenti. **a)** PSF nominale. **b)** Errore sistematico di 0.7 m sul raggio di curvatura di tutti i cristalli. **c)** Distribuzione uniforme dei raggi di curvatura dei cristalli, con valore medio di 40.4 m e ampiezza pari a 5 m. **d)** Distribuzione gaussiana dei raggi di curvatura dei cristalli, con valore medio di 40.4 m e deviazione standard pari a 2.1 m. (I valori scelti sono consistenti con quanto discusso nel paragrafo 2.4.1).

## 2.6 Comportamento di un settore di cristalli

Un settore di lente è un gruppo di tessere posizionate a formare un settore circolare (frazione della lente completa). I cristalli sono disposti su più anelli concentrici e sono limitati tra un angolo massimo ed un angolo minimo. Essendo formato da più anelli, un settore permetterà la diffrazione di una banda di energie più larga rispetto a quella diffratta da un singo-

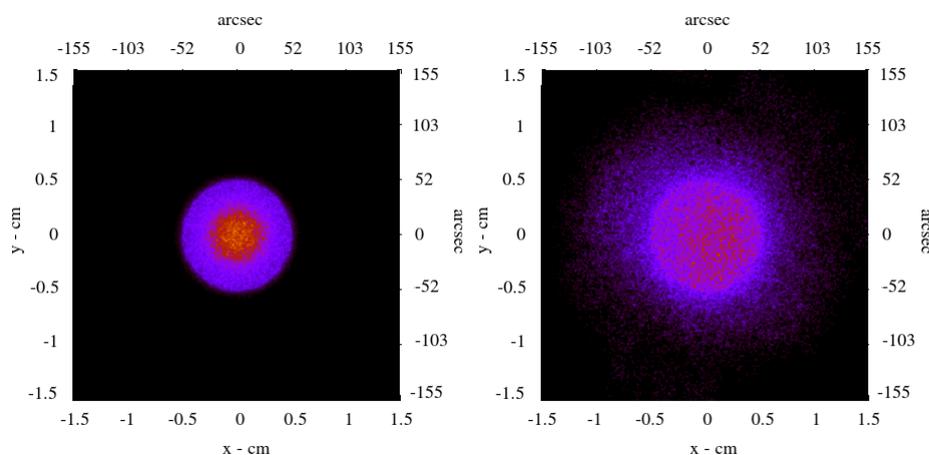


Figura 2.19: Simulazione di PSF prodotta da un anello di cristalli curvi ( $R=40$  m) di GaAs (111) di dimensioni  $30 \times 10 \times 2$  mm focalizzanti fotoni di 135 keV. **Sinistra:** Caso nominale (nessun incertezza presente). **Destra:** Caso in cui sono presenti tutti i seguenti effetti peggiorativi: 1. Distribuzione gaussiana dei raggi di curvatura dei cristalli, per la quale è stato scelto il valore medio di 40.4 m e deviazione standard pari a 2.1 m. 2. Distribuzione degli angoli di errore  $\theta$ , distribuiti in modo gaussiano con media pari a 11 arcsec e deviazione standard di 10.7 arcsec. 3. Distribuzione degli angoli di errore  $\phi$ , distribuiti in modo gaussiano con media pari a 4 arcsec e deviazione standard di 17.2 arcsec. Immagine ottenuta simulando  $10^6$  fotoni incidenti.

Tabella 2.5: Dimensioni delle PSF prodotte in assenza di errori e simulando la peggiore e la migliore distribuzione d'errore di disallineamento.

Simulazione	PSF FWHM (mm)	PSF FWHM (arcsec)
Assenza di errori	$5.83 \pm 0.06$	$60.1 \pm 0.6$
Lower limit per $\sigma_\theta$ e $\sigma_\phi$	$7.83 \pm 0.2$	$81 \pm 2$
Upper limit per $\sigma_\theta$ e $\sigma_\phi$	$10.1 \pm 0.1$	$104 \pm 1$

lo cristallo. Al contrario di una disposizione ad anello completo di lente di Laue (o di un gruppo di anelli), la PSF di un settore non avrà un picco centrato circondato da un alone diffuso, ma sarà influenzata dal fatto che la simmetria circolare viene a meno in questa configurazione. La PSF del settore avrà una forma (come vedremo nel seguito) che rifletterà la forma e la dimensione del settore. Questa configurazione è per noi particolarmente interessante in quanto viene sfruttata per permettere una costruzione mod-

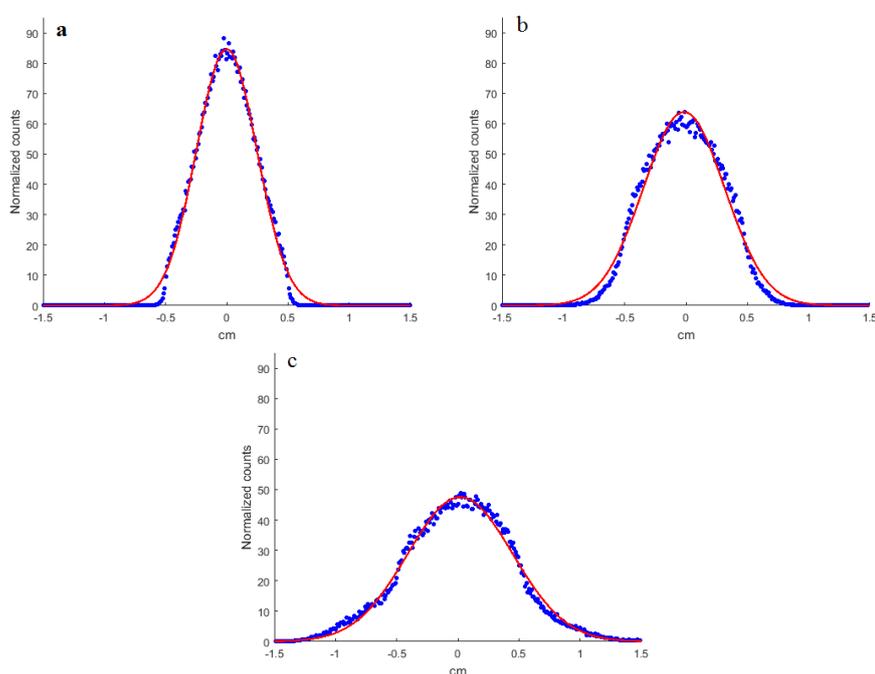


Figura 2.20: Confronto fra i profili lungo l'asse  $x$  delle immagini diffratte prodotte da tre anelli di cristalli, con sovrapposta la funzione gaussiana che meglio fitta i dati. **a)** Anello di cristalli posizionati in modo nominale. **b)** Anello di cristalli simulato le cui distribuzioni di errori di posizionamento sono delle gaussiane con deviazione standard pari al valore minore (lower limit) dell'intervallo di confidenza al 95% calcolato, (deviazione standard di 4.5 arcsec per  $\theta$  e 7.1 arcsec per  $\phi$ .) **c)** Anello di cristalli simulato le cui distribuzioni di errori di posizionamento sono delle gaussiane con deviazione standard pari al valore maggiore (upper limit) dell'intervallo di confidenza al 95% calcolato, (deviazione standard di 10.7 arcsec per  $\theta$  e 17.2 arcsec per  $\phi$ .)

ulare della lente, che ai fini del montaggio verrà necessariamente divisa in più settori circolari.

Infatti il prototipo che verrà assemblato è un settore di lente costituito di 16 tessere cristalline con raggio di curvatura nominale pari a 40 m e mosaicità media pari a 15.8 arcsec. Il modulo diffrange radiazione nella banda [130, 150] keV, copre un angolo pari a  $5^\circ$ , ha un raggio minimo di 0.47 m ed un raggio massimo di 0.58 m. Inoltre le tessere sono separate da un frame di dimensione 1 mm sia lungo la direzione radiale sia lungo la direzione trasversa. In Fig. 2.21 è mostrato la disposizione spaziale dei cristalli della lente di Laue formata da 4 anelli concentrici di tessere, e il modulo (in rosso) da realizzare in laboratorio. Sfruttando il programma di simulazione

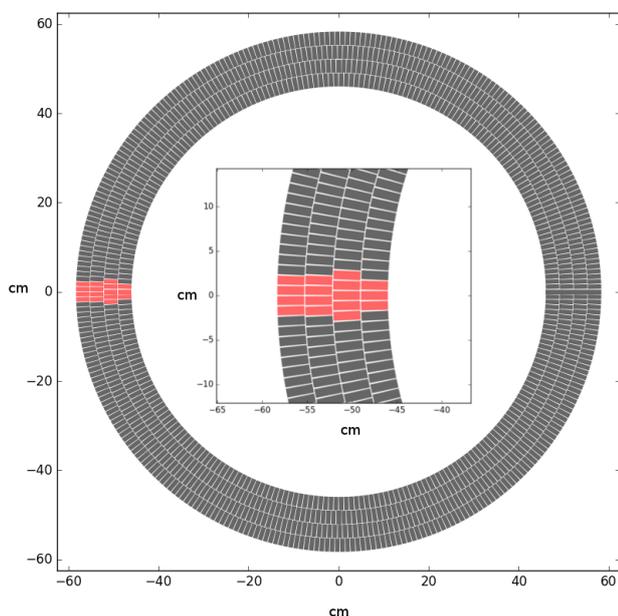


Figura 2.21: Rappresentazione della lente di Laue costituita da 1154 cristalli e del modulo (in rosso) che sarà realizzato nel laboratorio LARIX.

ed i dati relativi al posizionamento dei cristalli raccolti precedentemente a questo lavoro sono state ottenute dalle simulazioni da confrontare con i dati che verranno misurati in laboratorio. Per produrre le simulazioni è stata utilizzata la classe Sector che serve a riprodurre le prestazioni del settore di lente, date le dimensioni e il numero di tessere progettato. È stata innanzitutto prodotta una simulazione del caso ideale in cui la lente è priva di qualsiasi tipo di errori di posizionamento o deformazione radiale (Fig. 2.22 a sinistra). Come si può osservare la PSF idealmente ottenibile dal nostro prototipo è simile a quella di un cristallo singolo.

Questo perché i cristalli sono in numero limitato, e ciascuno di essi è traslato e ruotato di pochi gradi rispetto all'asse del fascio incidente. La struttura della PSF rimarrà ancora rettangolare, delle stesse dimensioni della PSF di un cristallo. È stata poi prodotta la simulazione in cui sono stati introdotti gli errori sul raggio di curvatura e sul posizionamento. Come descritto nel paragrafo 2.4.1 il raggio di curvatura è distribuito secondo una funzione gaussiana centrata sul valore medio di 40.4 m e con FWHM di 5 m, gli errori di posizionamento sugli angoli  $\theta$  e  $\phi$  sono distribuiti in modo gaussiano e centrati rispettivamente sui valori di 11 arcsec e 4 arcsec e con deviazione standard preso come il valore superiore dell'intervallo di confidenza, al 95% di confidenza (Fig. 2.22 a destra).

Rispetto all'immagine diffratta determinata nelle condizioni nominali, si nota immediatamente che la PSF affetta da errore è più allargata e spostata

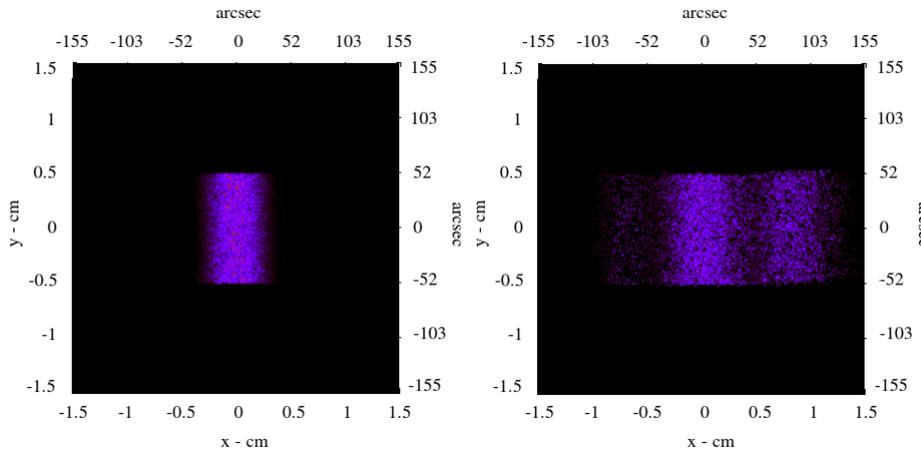


Figura 2.22: Settore di lente di Laue costituito da 16 cristalli di GaAs ( $R=40$  m,  $\beta = 15''$ ). **Sinistra:** simulazione di PSF prodotta dal settore in cui i 16 cristalli sono posizionati in maniera ottimale. **Destra:** Simulazione di PSF prodotta da un settore in cui sono presenti tutti gli effetti peggiorativi e nella situazione peggiore possibile. 1. Distribuzione gaussiana dei raggi di curvatura dei cristalli, per la quale è stato scelto il valore medio di 40.4 m e deviazione standard pari a 2.1 m. 2. Distribuzione degli angoli di posizionamento di errore  $\theta$  con una distribuzione gaussiana con media pari a 11 arcsec e deviazione standard di 10.7 arcsec. 3. Distribuzione degli angoli di errore  $\phi$  distribuiti in modo gaussiano con media pari a 4 arcsec e deviazione standard di 17.2 arcsec.

rispetto al centro dell'immagine ideale. In particolare, sono visibili segnali diffratti da cristalli fortemente spostati rispetto alla posizione ottimale che provocano la formazione di picchi secondari che ci aspettiamo essere presenti (sebbene statisticamente diversi da quelli qui riportati) anche nell'attività sperimentale che sarà effettuata nei prossimi mesi. È comunque importante segnalare che questi picchi secondari sono particolarmente evidenti perché il settore simulato è costituito da un numero limitato di cristalli. Dall'analisi del caso dell'anello di tessere è ben visibile che, quando in cristalli sono dell'ordine di qualche centinaio, l'effetto cumulativo è quello di allargare la PSF ma la simmetria circolare dell'immagine è conservata. La differenza fra caso nominale e caso affetto da inaccurately si può rilevare anche osservando i profili di Fig. 2.23 in cui viene anche riportato (curva blu) il caso in cui sia stato considerato il lower limit della deviazione standard su entrambi gli angoli  $\theta$  e  $\phi$ . Tenendo conto delle simulazioni prodotte per un anello, per le quali è stato verificato che nel nostro caso l'errore di deformazione radiale è praticamente trascurabile, ci aspettiamo che l'allargamento della PSF sia quindi in gran parte dovuto all'errore di posizionamento delle tessere. Limitare l'incertezza nel posizionamento è

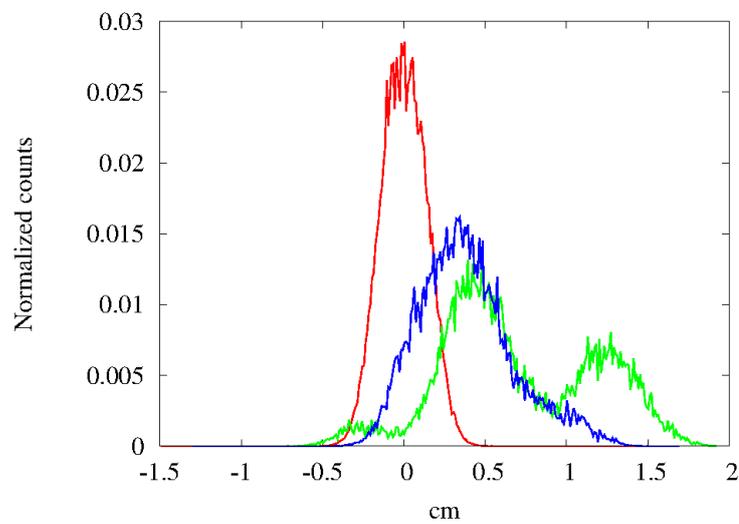


Figura 2.23: Profilo lungo l'asse x della PSF prodotta dal settore di lente di Laue nel caso di montaggio e raggio di curvatura nominali (curva rossa), settore simulato con distribuzioni di errori di posizionamento gaussiane con deviazione standard pari al valore minore dell'intervallo di confidenza al 95% calcolato (lower limit, curva blu), settore simulato con distribuzioni di errori di posizionamento gaussiane con deviazione standard pari al valore maggiore dell'intervallo di confidenza al 95% calcolato (upper limit, curva verde).

quindi fondamentale per la riuscita della realizzazione di un prototipo di lente di Laue.



## Capitolo 3

# Attività sperimentale

*In questo Capitolo viene descritta l'attività svolta presso il laboratorio LARIX del Dipartimento di Fisica dell'Università di Ferrara e dedicata alla realizzazione di un prototipo di lente di Laue. L'attività preliminare alla realizzazione di un settore di lente di Laue svolta è stata principalmente divisa in due fasi. La prima fase è stata dedicata alla scelta dei materiali costituenti i cristalli, il substrato del prototipo e l'adesivo impiegato. La seconda parte invece è stata dedicata alla preparazione del laboratorio (sistemazione del sensore di temperatura della camera pulita, manutenzione dei filtri della camera pulita e della sorgente di raggi X). In una fase successiva avverrà la fase di montaggio vera e propria dei cristalli sul substrato.*

### 3.1 Scelta dei materiali cristallini

Per la realizzazione del prototipo verranno impiegati 16 cristalli di Arseniuro di Gallio (GaAs). Il GaAs è un materiale la cui struttura naturale è a mosaico con mosaicità naturale di qualche decina di arcsec. I cristalli vengono cresciuti dal laboratorio IMEM (Istituto dei Materiali per Elettronica e Magnetismo) - CNR di Parma. Per la crescita dei cristalli si fa uso della cosiddetta tecnica a liquido incapsulato di Czochralski. Tale metodo permette di ottenere la crescita di cristalli di estrema purezza. Il processo Czochralski consiste nello spostamento verticale e contemporaneamente in una rotazione antioraria, dell'ordine dei millimetri al minuto, di un seme monocristallino di Arseniuro di Gallio introdotto nello stesso materiale fuso. La parte del seme immersa nel liquido fonde ma la parte restante che lambisce la superficie rimane inalterata. Durante il sollevamento/rotazione avviene una progressiva solidificazione all'interfaccia fra il seme cristallino e il materiale fuso generando un cristallo di grandi dimensioni. Gli atomi di materiale fuso a contatto con il seme si solidificano molto rapidamente aderendo al seme e si orientano secondo il reticolo atomico formando anche essi un reticolo monocristallino. Lo stesso labora-

torio provvede anche alla realizzazione della curvatura dei campioni con il metodo che verrà descritto in seguito. I piani cristallini impiegati sono individuati dagli indici di Miller (220). La dimensione fisica dei cristalli è di  $30 \times 10 \times 2$  mm, con lato focalizzante pari a 30 mm. In Fig. 3.1 è mostrata una tessera di GaAs di dimensioni  $30 \times 10 \times 2$  mm già sottoposto a lappatura, che induce la curvatura lungo la direzione maggiore. Si è scelto il GaAs perché risulta essere il materiale che ci permette di ottenere la migliore efficienza per la lunghezza focale e l'intervallo di energia di interesse. Dopo la crescita del lingotto il processo successivo è quello di taglio dei cristalli. In questa fase l'incertezza maggiore si ha nella realizzazione del taglio in modo che superficie esterna e piani cristallini siano il più possibile ortogonali. In realtà la discrepanza fra direzione media dei piani atomici e perpendicolare alla superficie è dell'ordine di qualche arcmin e tale angolo (sempre diverso da zero) è detto angolo di miscut  $\theta_c$ .



Figura 3.1: Cristallo di GaAs (220) (già sottoposto a lappatura per indurre la curvatura) impiegato nel prototipo di lente di Laue.

La presenza di quest'angolo risulta problematica in quanto induce un effetto analogo ad un errore di posizionamento. Se i piani cristallini sono inclinati rispetto alla perpendicolare, l'angolo meccanico di posizionamento sarà diverso dall'angolo di Bragg legato all'energia diffratta atteso per permettere la diffrazione, esattamente come se il cristallo fosse ruotato rispetto alla sua posizione ottimale (Fig. 3.2). Questo induce quindi uno spostamento del diffratto. Quest'effetto purtroppo dipende dal processo macroscopico di taglio delle tessere e non è controllabile con accuratezza dell'arcsec, come invece sarebbe desiderabile. Un approccio per ridurre l'effetto che tale angolo induce è quello di tenere conto dell'angolo di miscut e andare a riorientare opportunamente il cristallo. Tuttavia questo provocherebbe l'utilizzo di una quantità asimmetrica di colla che a causa di effetti di ritiro può andare a ruotare casualmente il cristallo, introducendo quindi un errore di posizionamento e nullificando il tentativo di correggere la direzione

del diffratto. Come illustrato nel capitolo precedente, si è osservato che le distribuzioni di curvatura e mosaicità dei cristalli impegnati sono delle gaussiane centrate sui valori medi di 40.4 m per i raggi e 15.8 arcsec per le mosaicità. Dal campione di 60 cristalli sono stati quindi selezionati 16 cristalli per il montaggio.

Dopo il taglio, i cristalli sono successivamente trattati per far insorgere la curvatura. Il processo di lappatura induce una tensione meccanica sulla superficie lavorata della tessera, che provoca il loro incurvamento definitivo e molto stabile nel tempo.

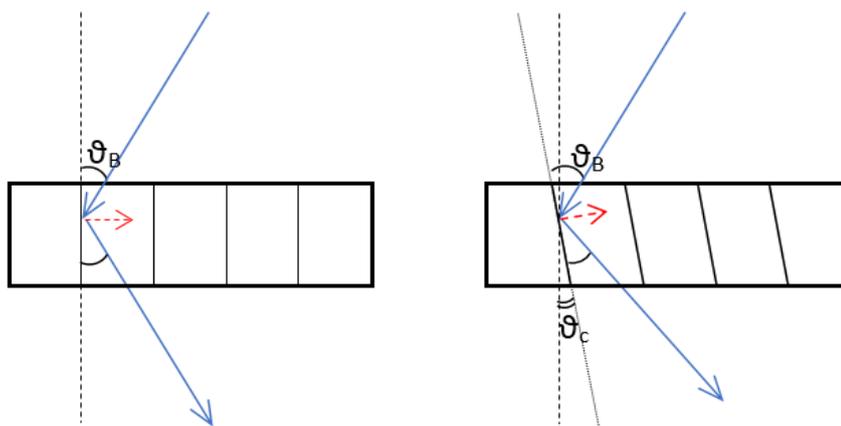


Figura 3.2: Rappresentazione dell'effetto provocato dalla presenza di un angolo di miscut  $\theta_c$ . In questo esempio esagerato si può vedere chiaramente come il diffratto venga spostato e di conseguenza colpirà il piano focale più a destra rispetto alla situazione ottimale.

### 3.1.1 Adesivo impiegato

La scelta dell'adesivo è particolarmente importante in quanto un ritiro non controllato della colla può indurre un errore di posizionamento dei cristalli. Si osserva che il ritiro della colla dipende dal volume della goccia utilizzata per fissare le tessere al substrato, di conseguenza se la forma della goccia è asimmetrica, il ritiro non sarà uniforme su tutta l'estensione di questa. Questo può andare a ruotare il cristallo, che quindi non si troverà più posizionato in modo ottimale. Per ovviare al problema, precedentemente a questo elaborato è stato svolto un attento studio dei tipi di colle utilizzabili in modo da trovare la tipologia di adesivo con un minore ritiro. In seguito a queste analisi si è deciso di utilizzare una colla UV, che verrà applicata al cristallo con un apposito dosatore, in modo da potersi assicurare che la quantità di adesivo presente sia il più possibile simile per ogni cristallo. Siccome questo tipo di colla polimerizza sotto l'azione di raggi UV, è

necessario tenere conto che durante la loro applicazione questi andranno a scaldare il cristallo ed il supporto.

Si è inoltre determinata la precisione del dosatore per assicurarsi che la dimensione delle gocce prodotte fosse sufficientemente uniforme. Il dosatore consiste in un controller meccanico collegato ad una siringa sotto pressione (Fig. 3.3). L'emissione della colla viene avviata con un pedale ed è possibile sia effettuare un dosaggio manuale, sia produrre una quantità fissa di colla dipendente da due parametri regolabili. Questi parametri sono la pressione a cui è sottoposta la siringa ed il tempo di emissione della colla. Più pressione e tempo di emissione sono grandi e più adesivo sarà erogato. Per ver-



Figura 3.3: Il dosatore di colla utilizzato. Si possono vedere le due manopole con le quali vengono regolate pressione e temporizzazione.

ificare che le gocce siano tutte sufficiente simili, sono stati prodotti quattro campioni di 30-40 gocce a fissati valori di pressione e tempo di erogazione. Questi due parametri sono stati variati da campione a campione, in modo da poter osservare indicativamente l'effetto di questi sulla precisione dell'emissione. Le gocce sono state prodotte su della carta e polimerizzate sfruttando la luce solare, dopodiché sono state rimosse una per una dal loro supporto e pesate utilizzando una bilancia ad alta precisione con sensibilità pari a 0.1 mg. Siccome le gocce si sono staccate con elevata facilità dalla carta e senza lasciare residui visibili, si è deciso di trascurare un'eventuale perdita di massa dovuta alla rimozione dal supporto. Sui quattro campioni prodotti sono state calcolate media e deviazione standard, in modo da stimare indicativamente l'errore sulle masse delle gocce di colla prodotte. I quattro campioni con relativi parametri iniziali, sono riportati nelle tabelle 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4.

Il dosatore risulta quindi essere sufficientemente accurato per la nostra applicazione, in quanto ci permette di produrre quantità di colla con una precisione di mezzo milligrammo. Si è osservato che aumentare molto la pressione peggiora la precisione della misura. Probabilmente questo è

Tabella 3.1: Dati raccolti relativi al primo campione. Sono state pesate 36 gocce di colla totali, prodotte con una pressione di 3.5 bar ed una temporizzazione di 6.5. La media delle masse è risultata pari a 7.8 mg, con una deviazione standard di 0.6 mg.

Massa della goccia [mg]	Frequenza
$6 < m \leq 6.5$	1
$6.5 < m \leq 7.0$	2
$7.0 < m \leq 7.5$	6
$7.5 < m \leq 8.0$	10
$8.0 < m \leq 8.5$	14
$8.5 < m \leq 9.0$	3

Tabella 3.2: Dati raccolti relativi al secondo campione. Sono state pesate 36 gocce di colla totali, prodotte con una pressione di 6 bar ed una temporizzazione di 6.5. La media delle masse è risultata pari a 11.8 mg, con una deviazione standard di 0.7 mg.

Massa della goccia [mg]	Frequenza
$10.0 < m \leq 10.5$	2
$10.5 < m \leq 11.0$	1
$11.0 < m \leq 11.5$	11
$11.5 < m \leq 12.0$	8
$12.0 < m \leq 12.5$	10
$12.5 < m \leq 13.0$	2
$13.0 < m \leq 13.5$	2

Tabella 3.3: Dati raccolti relativi al terzo campione. Sono state pesate 33 gocce di colla totali, prodotte con una pressione di 6 bar ed una temporizzazione di 2.5. La media delle masse è risultata pari a 9.7 mg, con una deviazione standard di 0.7 mg.

Massa della goccia [mg]	Frequenza
$8.5 < m \leq 9.0$	8
$9.0 < m \leq 9.5$	6
$9.5 < m \leq 10.0$	10
$10.0 < m \leq 10.5$	5
$10.5 < m \leq 11.0$	2
$11.0 < m \leq 11.5$	2

Tabella 3.4: Dati raccolti relativi al quarto campione. Sono state pesate 39 gocce di colla totali, prodotte con una pressione di 1 bar ed una temporizzazione di 11.5. La media delle masse è risultata pari a 4.9 mg, con una deviazione standard di 0.5 mg.

Massa della goccia [mg]	Frequenza
$4.0 < m \leq 4.2$	3
$4.2 < m \leq 4.4$	7
$4.4 < m \leq 4.6$	1
$4.6 < m \leq 4.8$	7
$4.8 < m \leq 5.0$	9
$5.0 < m \leq 5.2$	3
$5.2 < m \leq 5.4$	2
$5.4 < m \leq 5.6$	2
$5.6 < m \leq 5.8$	3
$5.8 < m \leq 6.0$	2

dovuto ad un'emissione troppo violenta del liquido. Per sfruttare al meglio il dosatore è quindi preferibile utilizzare una pressione non troppo elevata, ma tempi di emissione più lunghi.

### 3.1.2 Scelta del substrato

In quanto l'obiettivo finale del progetto è di costruire una lente capace di operare in modo ottimale nello spazio, il substrato deve essere scelto in modo da essere il più possibile immune a sbalzi termici, di pressione e stress meccanici. Inoltre, visto l'impiego di colle UV, per permettere l'incollaggio è necessario che il substrato utilizzato sia trasparente. In precedenza è stato usato un supporto di vetro comune piatto, tuttavia per cercare di aumentare ulteriormente la qualità del prototipo si è deciso di cambiare materiale ed utilizzare un substrato di quarzo curvo (Fig. 3.4). Il quarzo è stato scelto per via del suo basso coefficiente di dilatazione termica. La scelta di utilizzare un supporto curvo e non piano deriva sempre dalla necessità di controllare il più possibile la quantità e la forma della colla erogata. Se il supporto è piatto infatti, per inclinare i cristalli al giusto angolo è necessario utilizzare una quantità di colla asimmetrica, che quindi può provocare errori di posizionamento dovuti al ritiro della stessa. Nel caso di substrato curvo invece i cristalli combaciano più precisamente con questo, permettendo di ridurre al minimo la quantità di colla da utilizzare. Anche se i raggi di curvatura dei cristalli non sono tutti perfettamente identici, le superfici di substrato e tessere sono così piccole rispetto alla superficie alla quale sarebbero tangenti che la differenza nella forma della colla da utilizzare per effettuare il montaggio è trascurabile. Il substrato è inoltre fis-

sato su un supporto d'acciaio Invar<sup>®</sup>, che ci garantisce anch'esso un ottimo coefficiente di dilatazione termica.



Figura 3.4: Substrato di quarzo, già adeguatamente incurvato, che verrà utilizzato per costruire il prototipo. Il quarzo presenta una lavorazione satinata in modo da favorire l'aggrappaggio dei cristalli allo stesso. Abbiamo infatti ipotizzato che una superficie lavorata otticamente, quindi perfettamente trasparente e liscia, potesse essere poco efficace nel bloccare i cristalli.



## Capitolo 4

# Conclusioni

Il lavoro svolto durante questa tesi è stato incentrato sull'attività preliminare necessaria per costruire un primo modulo della lente. È stata svolta attività teorica relativa allo studio del comportamento dei cristalli, attività di upgrade del software utilizzato, analisi degli errori ed infine attività sperimentale necessaria per preparare il laboratorio alle misure.

L'attività svolta ci ha portato ai seguenti risultati:

- **Studio teorico dell'effetto di errori sul raggio di curvatura dei cristalli:** nel paragrafo 2.3 è stato determinato l'allargamento della PSF prodotta da un singolo cristallo deformato. È stato determinato che in prima approssimazione il valore assunto dalla PSF deformata è il massimo tra l'allargamento dovuto alla mosaicità e l'allargamento dovuto ad una deformazione radiale. L'effetto della deformazione si farà quindi sentire solo oltre un valore limite della stessa per cui il contributo di distorsione radiale supera quello dato dalla mosaicità. Inoltre è stato verificato che, a parità di valore assoluto dell'errore, cristalli con un raggio di curvatura in eccesso provocano una distorsione minore di cristalli con raggio di curvatura in difetto. Nella scelta dei cristalli da montare può essere utile tenere conto di questo e favorire cristalli meno incurvati.
- **Descrizione matematica della produzione della PSF:** nel paragrafo 2.2 viene descritto matematicamente come la PSF viene prodotta e si vede che la FWHM di questa è necessariamente legata alla FWHM della curva di riflettività, invece che semplicemente alla mosaicità del cristallo. Un futuro sviluppo dello studio del problema potrebbe essere andare a calcolare analiticamente l'altezza a metà altezza della riflettività, in modo da ottenere l'esatta stima teorica della dimensione della PSF. Siccome la funzione di riflettività presenta una dipendenza dall'angolo di Bragg della radiazione incidente, non è da escludere che la Point Spread Function possa avere anch'essa una dipendenza dall'energia.

- **Analisi degli errori di posizionamento e di deformazione dei cristalli:** nel paragrafo 2.4 abbiamo cercato di determinare la distribuzione matematica di questi errori e ne abbiamo quantificato il valore. Per raggio di curvatura e mosaicità dei cristalli si è osservato che le distribuzioni di questi parametri seguono un andamento gaussiano, mentre per le distribuzioni degli errori di posizionamento è stata assunta una distribuzione gaussiana e si è cercato di stimare un intervallo di affidabilità per i parametri che la caratterizzano. Dai dati misurati si osserva che sia  $\theta$  che  $\phi$  sono dell'ordine di grandezza dei 10 arcsec. Un errore di questo tipo è praticamente trascurabile su  $\phi$ , mentre risulta particolarmente evidente sull'altro angolo.
- **Upgrade del software:** per migliorare il realismo della simulazione di questi effetti di distorsione è stato effettuato un upgrade del codice, che adesso può simulare distribuzioni gaussiane degli errori di posizionamento e dei raggi di curvatura ed eventuali errori sistematici su questi parametri. È stata inoltre aggiunta la possibilità di simulare una sorgente monocromatica, cosa precedentemente non possibile ed applicabile per future simulazioni di fisica medica. L'effetto sulla PSF di una distribuzione di mosaicità non è stato ancora studiato né introdotto nel codice di simulazione, tuttavia ci aspettiamo che possa portare ad una modifica della banda passante e dell'area efficace della lente.
- **Produzione di simulazioni:** Le nuove funzionalità aggiunte al programma sono state sfruttate per ottenere delle simulazioni che ci permettono di osservare l'effetto degli errori stimati sulla PSF di un anello di cristalli, in modo da poter vedere di quanto ci aspettiamo peggiori la PSF per effetto dei vari tipi di errore. Infine sono state prodotte delle simulazioni il più verosimili possibile del comportamento del modulo che verrà montato in laboratorio. Dalle simulazioni possiamo osservare che nelle nostre condizioni sia l'errore di posizionamento  $\phi$  sia l'effetto di una distribuzione radiale sono praticamente trascurabili. Il primo è trascurabile perché i raggi degli anelli sono sempre molto minori della distanza focale e quindi l'effetto di  $\phi$  sarà molto minore di quello di  $\theta$ , mentre il secondo è trascurabile perché, con la nostra distribuzione di curvature, la maggior parte dei cristalli avrà un raggio di curvatura compreso tra i valori limite per i quali il contributo di deformazione sulla dimensione della PSF non si faccia sentire. Vediamo quindi che il grosso dell'errore è tutto prodotto dalla presenza del disallineamento  $\theta$ , che invece provoca un visibile peggioramento della PSF. Controllare rotazioni accidentali attorno all'asse  $z$  è quindi quanto mai fondamentale per ottenere una buona

PSF. Queste simulazioni verranno confrontate con le misure che verranno effettivamente effettuate appena il modulo sarà completo.

- **Attività di manutenzione e preparazione al montaggio:** La parte di manutenzione svolta in laboratorio ha permesso di preparare i tubi radiogeni e la camera pulita alla fase di montaggio. In particolare, il sensore di temperatura è stato spostato dalla sua posizione precedente e posizionato all'interno della camera di montaggio del modulo, il più vicino possibile ai supporti del substrato. È stato deciso di spostare il sensore in quanto, nella posizione precedente, era soggetto ad eccessivi sbalzi termici che provocavano attivazioni erronee del sistema di controllo ambientale. È stato inoltre verificato che il dosatore di colla permette di produrre gocce con la precisione voluta. Infine, è stata effettuata la scelta dei materiali da impiegare ed il progetto effettivo del modulo da montare.

Nei prossimi mesi ci si aspetta di poter finalmente iniziare il montaggio del primo sottopetalo di lente e testare immediatamente i metodi di incollaggio ipotizzati. La PSF prodotta da questo modulo verrà confrontata con le simulazioni e si determinerà la qualità della focalizzazione eseguita con più cristalli contemporaneamente. Tutto questo sarà critico per sviluppare un modello fisico di tutta la lente di Laue e progettare un concetto di missione per applicazioni astrofisiche.



# Bibliografia

- [1] E. Cavallari and F. Frontera, "Hard X-Ray/Soft Gamma-Ray Experiments and Missions: Overview and Prospects," vol. 212, pp. 429–518, Oct. 2017.
- [2] R. Giacconi, H. Gursky, F. R. Paolini, and B. B. Rossi, "Evidence for x Rays From Sources Outside the Solar System," *Physical Review Letters*, vol. 9, pp. 439–443, Dec. 1962.
- [3] G. H. Share, "Discovery of two cosmic x-ray bursts in 1970," *COSPAR, Symposium on Fast Transients in X- and Gamma-Rays*, vol. 42, pp. 29–33, June 1976.
- [4] R. Giacconi, E. Kellogg, P. Gorenstein, H. Gursky, and H. Tananbaum, "An x-ray scan of the galactic plane from uhuru," *Astrophysical Journal*, vol. 165, p. L27, April 1971.
- [5] K. Bennett, "COS-B: The highlights," *Nuclear Physics B Proceedings Supplements*, vol. 14, pp. 23–34, April 1990.
- [6] L. E. Peterson, "Instrumental technique in x-ray astronomy," *Annual review of astronomy and astrophysics*, vol. 13, pp. 423–509, 1975.
- [7] R. Giacconi, G. Branduardi, U. Briel, A. Epstein, D. Fabricant, E. Feigelson, W. Forman, P. Gorenstein, J. Grindlay, H. Gursky, F. R. Harnden, J. P. Henry, C. Jones, E. Kellogg, D. Koch, S. Murray, E. Schreier, F. Seward, H. Tananbaum, K. Topka, L. Van Speybroeck, S. S. Holt, R. H. Becker, E. A. Boldt, P. J. Serlemitsos, G. Clark, C. Canizares, T. Markert, R. Novick, D. Helfand, and K. Long, "The Einstein /HEAO 2/ X-ray observatory," *Astrophysical Journal*, vol. 230, pp. 540–550, June 1979.
- [8] P. A. J. de Korte, J. A. M. Bleeker, S. P. McKechnie, A. J. F. den Boggende, A. C. Brinkman, E. H. B. M. Gronenschild, G. Branduardi-Raymont, J. L. Culhane, and I. Mason, "The x-ray imaging telescopes on exosat," *European Space Agency, ESLAB Symposium on X-ray Astronomy*, vol. 30, pp. 495–511, March 1981.

- [9] A. Peacock, R. D. Andresen, G. Manzo, B. G. Taylor, G. Villa, S. Re, J. C. Ives, and S. Kellock, "The gas scintillation proportional counter on exosat," *European Space Agency, ESLAB Symposium on X-ray Astronomy*, vol. 30, pp. 525–534, March 1981.
- [10] M. J. L. Turner, A. Smith, and H. U. Zimmermann, "The medium energy instrument on exosat," *European Space Agency, ESLAB Symposium on X-ray Astronomy*, vol. 30, pp. 513–524, March 1981.
- [11] B. Aschenbach, H. Braeuninger, U. Briel, W. Brinkmann, H. Fink, N. Heinecke, H. Hippmann, G. Kettenring, G. Metzner, and A. Ondrusch, "The rosat mission," *Space Science Reviews*, vol. 30, pp. 569–573, 1981.
- [12] B. E. Burke, R. W. Mountain, P. J. Daniels, M. J. Cooper, and V. S. Dolat, "Ccd soft x-ray imagers for asca and axaf," in *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series* (O. H. Siegmund, ed.), vol. 2006 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, pp. 272–285, Nov. 1993.
- [13] Y. Tanaka, "First results from asca," in *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, vol. 25 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, p. 1344, Dec. 1993.
- [14] J. H. Swank, "The XTE mission," in *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, vol. 26 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, p. 1420, Dec. 1994.
- [15] L. Piro, L. Scarsi, and R. C. Butler, "Sax: the wideband mission for x-ray astronomy," in *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series* (S. Fineschi, ed.), vol. 2517 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, pp. 169–181, Oct. 1995.
- [16] E. Costa, F. Frontera, J. Heise, M. Feroci, J. inÅŻt Z, and F. Fiore, "Discovery of an X-ray afterglow associated with the -ray burst of 28 february 1997," *Nature*, vol. 387, pp. 783–785, 1997.
- [17] M. C. Weisskopf, "The chandra x-ray observatory (CXO): An overview," *ArXiv Astrophysics e-prints*, Dec. 1999.
- [18] M. C. Weisskopf, B. Brinkman, C. Canizares, G. Garmire, S. Murray, and L. P. V. Speybroeck, "An overview of the performance and scientific results from the chandra x-ray observatory," *The Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 114, pp. 1–24, January 2002.
- [19] M. C. Weisskopf, "Chandra x-ray optics," *Optical Engineering*, vol. 51, no. 1, pp. 011013–1–011013–7, 2012.

- [20] H. Barré, H. Nye, and G. Janin, "An overview of the xmm observatory system.," *ESA Bulletin*, vol. 100, pp. 15–20, Dec. 1999.
- [21] N. Produit, "Integral: a gamma-ray observatory," in *Matter, Anti-Matter and Dark Matter* (R. Battiston and B. Bertucci, eds.), pp. 199–209, Aug. 2002.
- [22] N. Gehrels, G. Chincarini, P. Giommi, K. O. Mason, and et al., "The swift gamma-ray burst mission," *The Astrophysical Journal*, vol. 611, pp. 1005–1020, Aug. 2004.
- [23] N. Gehrels, "The swift gamma-ray burst mission," in *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, vol. 36 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, p. 116.01, Dec. 2004.
- [24] A. N. Parmar, C. Winkler, P. Barr, L. Hansson, E. Kuulkers, R. Much, and A. Orr, "Integral mission," in *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, vol. 4851, pp. 1104–1112, March 2003.
- [25] G. BÄÅlanger, *INTEGRAL IBIS ObserverÄZs Manual*. ESA, 1.0 ed., March 2012.
- [26] C. S. FernÄandez, *INTEGRAL SPI ObserverÄZs Manual*. ESA, 1.0 ed., March 2012.
- [27] N. Lund, C. Budtz-Jørgensen, N. J. Westergaard, S. Brandt, I. L. Rasmussen, A. Hornstrup, C. A. Oxborrow, J. Chenevez, P. A. Jensen, S. Laursen, K. H. Andersen, P. B. Mogensen, I. Rasmussen, K. Omø, S. M. Pedersen, J. Polny, H. Andersson, T. Andersson, V. KÄmÄrÄinen, O. Vilhu, J. Huovelin, S. Maisala, M. Morawski, G. Juchnikowski, E. Costa, M. Feroci, A. Rubini, M. Rapisarda, E. Morelli, V. Carasiti, F. Frontera, C. Pellicciari, G. Loffredo, S. MartÄnez NÄñez, V. Reglero, T. Velasco, S. Larsson, R. Svensson, A. A. Zdziarski, A. Castro-Tirado, P. Attina, M. Gorla, G. Giulianelli, F. Cordero, M. Rezaad, M. Schmidt, R. Carli, C. Gomez, P. L. Jensen, G. Sarri, A. Tiemon, A. Orr, R. Much, P. Kretschmar, and H. W. Schnopper, "Jem-x: The x-ray monitor aboard integral," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 411, pp. L231–L238, Nov. 2003.
- [28] F. A. Harrison, W. W. Craig, F. E. Christensen, C. J. Hailey, W. W. Zhang, and et al., "The Nuclear Spectroscopic Telescope Array (NuSTAR) high-energy X-ray mission," *The Astrophysical Journal*, 2013.
- [29] T. Li, M. Wi, S.-N. Zhang, L.-H. Jiang, R.-L. Zhuang, Y.-D. Gu, and Z. You, "The Hard X-Ray Modulation Telescope HXMT," *International Cosmic Ray Conference*, vol. 5, p. 2775, July 2003.

- [30] F.-J. Lu, S. Zhang, B.-B. Wu, Y. Chen, X.-L. Cao, Z. Zhang, J.-K. Deng, S.-N. Zhang, and T.-P. Li, "The Hard X-ray modulation Telescope (HXMT) Mission," in *Astrophysics with All-Sky X-Ray Observations* (N. Kawai, T. Mihara, M. Kohama, and M. Suzuki, eds.), p. 368, Mar. 2009.
- [31] S. Sakurai, S. Yamada, S. Torii, H. Noda, K. Nakazawa, K. Makishima, and H. Takahashi, "Accretion geometry of the low-mass x-ray binary aquila x-1 in the soft and hard states," in *Publications of the Astronomy Society of Japan*, vol. 64, p. 72, Aug. 2012.
- [32] T. D. Salvo, R. Farinelli, L. Burderi, F. Frontera, E. Kuulkers, N. Masetti, N. R. Robba, L. Stella, and M. van der Klis, "On the spectral evolution of cygnus x-2 along its color-color diagram," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 386, pp. 535–547, May 2002.
- [33] A. D'Ái, P. Życki, T. D. Salvo, R. Iaria, G. Lavagetto, and N. R. Robba, "Broadband spectral evolution of scorpius x-1 along its color-color diagram," *The Astrophysical Journal*, vol. 667, pp. 411–426, Sept. 2007.
- [34] T. Maiolino, F. D'Amico, and J. Braga, "INTEGRAL observations of scorpius X-1: evidence for comptonization up to 200 keV," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 551, p. L2, Mar. 2013.
- [35] L. Kuiper, W. Hermsen, P. R. den Hartog, and W. Collmar, "Discovery of luminous pulsed hard X-ray emission from anomalous X-ray pulsars 1RXS J1708-4009, 4U 0142+61, and 1E 2259+586 by INTEGRAL and RXTE," *The Astrophysical Journal*, vol. 645, pp. 556–575, July 2006.
- [36] D. Götz, S. Mereghetti, A. Tiengo, and P. Esposito, "Magnetars as persistent hard X-ray sources: INTEGRAL discovery of a hard tail in SGR 1900+14," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 449, pp. L31–L34, April 2006.
- [37] L. Bassani, M. Molina, A. Malizia, F. Panessa, R. Landi, A. Bazzano, P. Ubertini, A. J. Bird, and J. B. Stephen, "Review on active galactic nuclei at hard x-ray energies: Arxiv e-prints." Feb. 2013.
- [38] Y. Q. Xue, B. Luo, W. N. Brandt, F. E. Bauer, B. D. Lehmer, and et al., "The chandra deep field-south survey: 4 Ms source catalogs," *The Astrophysical Journal Supplement*, vol. 195, p. 10, July 2011.
- [39] G. Ghisellini, "Blazars in hard x-rays," in *American Institute of Physics Conference Series* (J. Rodriguez and P. Ferrando, eds.), vol. 1126 of *American Institute of Physics Conference Series*, pp. 131–136, May 2009.

- [40] G. Weidenspointner, G. Skinner, P. Jean, J. Knödlseeder, P. von Ballmoos, and et al., "An asymmetric distribution of positrons in the galactic disk revealed by  $\gamma$ -rays," *Nature*, vol. 451, pp. 159–162, Jan. 2008.
- [41] D. P. Finkbeiner and N. Weiner, "Exciting dark matter and the INTEGRAL/SPI 511keV signal," *Physical Review D*, vol. 76, Oct. 2007.
- [42] P. von Ballmoos, H. Halloin, J. Paul, N. Abrosimov, K. Andersen, P. Astier, S. Basa, D. Barret, P. Bastie, A. Bazzano, A. Bignami, A. Blanchard, B. Cordier, T. Courvoisier, P. Courtois, A. Ealet, B. Hamelin, M. Harris, M. Hernanz, J. Isern, P. Jean, J. Knödlseeder, P. Laurent, F. Lebrun, X. Leyre, O. Limousin, A. Marcowith, V. Martinot, A. Mazure, L. Natalucci, J.-F. Olive, R. Pain, S. Paltani, N. Prantzos, H. Riemann, R. Sadat, H. Sainct, G. Skinner, R. K. Smither, P. Ubertini, F. Vedrenne, and G. Weidenspointner, "The max mission: Focusing on high-sensitivity gamma-ray spectroscopy," in *5th INTEGRAL Workshop on the INTEGRAL Universe* (V. Schoenfelder, G. Lichti, and C. Winkler, eds.), vol. 552 of *ESA Special Publication*, p. 747, oct 2004.
- [43] E. Virgilli, F. Frontera, t. **Valsan**, V. Liccardo, V. Carassiti, F. Evangelisti, and S. Squerzanti, "Laue lenses for hard x-/soft  $\gamma$ -rays: new prototype results," in *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, vol. 8147 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, Sep. 2011.
- [44] E. Virgilli, F. Frontera, t. **Valsan**, V. Liccardo, E. Caroli, J. B. Stephen, F. Cassese, L. Recanatesi, M. Pecora, S. Mottini, P. Attiná, and B. Negri, "The laue project for broadband gamma-ray focusing lenses," in *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, vol. 8147 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, Sep. 2011.
- [45] E. Virgilli, F. Frontera, **V. Valsan**, V. Liccardo, V. Carassiti, F. Evangelisti, S. Squerzanti, M. Parise, M. Statera, v. Guidi, , V. Bellucci, R. Camattari, E. Caroli, N. Auricchio, A. Basili, S. Silvestri, J. B. Stephen, F. Cassese, L. Recanatesi, C. Ferrari, A. Zappettini, E. Buffagni, S. Mottini, M. Pecora, and B. Negri, "The laue project and its main results," vol. 8861, 2013.
- [46] W. H. Bragg and W. L. Bragg in *Proc. Roy. Soc. London*, vol. 88, p. 428, 1913.
- [47] W. H. Bragg and W. L. Bragg in *Proc. Roy. Soc. London*, vol. 89, p. 246, 1913.
- [48] M. von Laue *Munchener Sitzungberichte*, vol. 1912, p. 363, 1913.

- [49] M. von Laue *Ann. der Phys.*, vol. 41, p. 989, 1913.
- [50] C. G. Darwin *Phil. Mag.*, vol. 27, no. 315, p. 657, 1914.
- [51] C. G. Darwin *Phil. Mag.*, vol. 43, p. 800, 1922.
- [52] A. Authier, *Dynamical Theory of X-ray Diffraction*. IUCr OXFORD, 2003.
- [53] A. Pisa, "Geometrical properties of the X-ray diffraction applied to Laue lenses," *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, vol. 580, pp. 1565–1570, Oct. 2007.
- [54] W. H. Zachariasen, *Theory of X-ray Diffraction in Crystals*. Wiley, 1945.